§10. 線形変換の固有値・固有空間

ここでは、線形変換の固有値・固有ベクトルの概念を復習する。個々のベクトルを考えるよりも空間で考えたい (ベクトルの選び方に依らない概念を使って固有値を理解したい) ため、固有ベクトルよりも固有空間を中心に理論を展開する。以下、$\mathbb{K}$ を体とする。

● 10-1：固有空間

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし、$T : V \longrightarrow V$ を $\mathbb{K}$-線形変換とする。$\alpha \in \mathbb{K}$ に対して、

(10-1 a)
$$W(\alpha, T) = \{ v \in V \mid T(v) = \alpha v \}$$

と定める。どのような線形変換 T について考察しているのかが明確な場合には、$W(\alpha, T)$ を $W(\alpha)$ と略記する。$W(\alpha, T)$ は V の部分空間である。

$W(\alpha, T) \neq \{0\}$ のとき、α を T の**固有値**という。また、このとき、$W(\alpha, T)$ を T の固有値 α に属する**固有空間**といい、$W(\alpha, T)$ の 0 でない元を α に属する T の**固有ベクトル**という。

例 10-1-1 微分作用素 $\frac{d}{dx} : C^{\infty}(\mathbb{R}) \longrightarrow C^{\infty}(\mathbb{R})$ を考える。このとき、実数 α に対して $\frac{d}{dx}(e^{\alpha x}) = \alpha e^{\alpha x}$ である。関数として $e^{\alpha x} \neq 0$ であるから、α は微分作用素 $\frac{d}{dx}$ の固有値であり、関数 $e^{\alpha x}$ $(x \in \mathbb{R})$ は α に属する固有ベクトルである。 □

n 次正方行列 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ から定まる線形変換 $T_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$, $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ の固有値を行列 A の $\mathbb{K}$ **内の固有値**という。また、A の $\mathbb{K}$ 内の固有値 α に対して、T_A の固有空間

(10-1 b)
$$W(\alpha, T_A) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x} \}$$

を A の $\mathbb{K}^n$ **における固有空間**といい、$W(\alpha, T_A)$ の中の $\mathbf{0}$ でない元を α に属する A の $\mathbb{K}^n$ **における固有ベクトル**という。

例 10-1-2 $c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{K}$ を定数とし、次の k 次正方行列を考える：

(10-1 c)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \text{O} & \\ & 0 & 1 & & \\ & \text{O} & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -c_k & -c_{k-1} & \cdots & -c_2 & -c_1 \end{pmatrix}.$$

A の固有値 $\alpha \in \mathbb{K}$ に属する A の $\mathbb{K}^k$ における固有空間は次で与えられる：

(10-1 d)
$$W(\alpha, T_A) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^{k-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{K} \right\}$$

実際、$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in W(\alpha, T_A)$ に対して $A\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x}$ より、

$$\begin{cases} x_2 = \alpha x_1 \\ x_3 = \alpha x_2 \\ \vdots = \vdots \\ x_k = \alpha x_{k-1} \\ -c_k x_1 - c_{k-1} x_2 - \cdots - \cdots - c_1 x_k = \alpha x_k \end{cases}$$

となる。最初の $(k-1)$ 個の式から

$$x_2 = \alpha x_1,\ x_3 = \alpha^2 x_1,\ x_4 = \alpha^3 x_1, \cdots, x_k = \alpha^{k-1} x_1$$

を得る。このとき、最後の式は α が A の固有値であることから、自動的に満たされている。こうして、$x_1 = t$ $(t \in \mathbb{K})$ とおくと、$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^{k-1} \end{pmatrix}$ と書けることが示された。逆に、この形をしたベクトルは $W(\alpha, T_A)$ に属する。 $\square$

● **10 - 2 : 固有多項式**

V $(\neq \{0_V\})$ を $\mathbb{K}$ 上の n 次元ベクトル空間とし、$T : V \longrightarrow V$ を $\mathbb{K}$-線形変換とする。V の基底 $\mathscr{B}$ を勝手に 1 つとり、その基底に関する T 行列表示を A とおく。このとき、x についての多項式

(10 - 2 a)
$$\Delta_A(x) = |xE_n - A|$$

を A の**固有多項式**と呼ぶ。

$\Delta_A(x)$ は V の基底 $\mathscr{B}$ の選び方に依らない。実際、$\mathscr{B}'$ を V のもう 1 つの基底とし、これに関する T の行列表示を B とおく。すると、$B = P^{-1}AP$ となる正則行列 P が存在する。このとき、$\Delta_B(x) = |P^{-1}(xE_n - A)P| = |P^{-1}| \cdot |xE_n - A| \cdot |P| = |xE_n - A| \cdot |P^{-1}| \cdot |P| = \Delta_A(x)$ となる。そこで、

(10 - 2 b)
$$\Delta_T(x) = \Delta_A(x)$$

と定め、線形変換 T の**固有多項式**と呼ぶ。

例 10 - 2 - 1 $c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{K}$ を定数とし、漸化式

$$a_{n+k} + c_1 a_{n+k-1} + \cdots + c_k a_n = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

を満たす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体からなる $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $V = S(c_1, \cdots, c_k; \mathbb{K})$ を考える。V 上の線形変換 $T : V \longrightarrow V$ を

$$T(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$$

によって定義する。このとき、T の固有多項式は次で与えられる：

(10 - 2 c)
$$\Delta_T(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + \cdots + c_{k-1} x + c_k.$$

(**証明**)

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_k$ を最初の $k+1$ 項がそれぞれ以下のように与えられる V に属する数列とする。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= 1, 0, 0, \cdots, 0, -c_k, \cdots\cdots, \\ \boldsymbol{e}_2 &= 0, 1, 0, \cdots, 0, -c_{k-1}, \cdots\cdots, \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ \boldsymbol{e}_k &= 0, 0, 0, \cdots, 1, -c_1, \cdots\cdots \end{aligned}$$

“$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_k$” は V の基底をなし、この基底に関する T の行列表示は (10 - 1 c) に一致する。よって、

$$\Delta_T(x) = |xE_k - A| = \begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ & x & -1 & \text{\Large O} & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \text{\Large O} & & x & -1 \\ c_k & c_{k-1} & \cdots & c_2 & x+c_1 \end{vmatrix}$$

となる。右辺の行列式が (10-2 c) になることを k に関する数学的帰納法で証明する。(10-1 c) の行列 A を A_k とおく。

Ⅰ. $k=1$ のとき、$\Delta_{A_1}(x) = |xE_1 - A_1| = x + c_1$ となるので、(10-2 c) は成り立つ。

Ⅱ. $1 < k$ とし、$\Delta_{A_{k-1}}(x) = x^{k-1} + c_1x^{k-2} + \cdots + c_{k-2}x + c_{k-1}$ が成立していると仮定する。このとき、行列式 $|xE_k - A|$ を第1列に関して余因子展開して

$$\Delta_{A_k}(x) = x\begin{vmatrix} x & -1 & & \text{\Large O} \\ \text{\Large O} & \ddots & \ddots & \\ & & x & -1 \\ c_{k-1} & \cdots & c_2 & x+c_1 \end{vmatrix} + (-1)^{k+1}c_k\begin{vmatrix} -1 & & \text{\Large O} & \\ x & -1 & & \\ \text{\Large O} & \ddots & \ddots & \\ & & x & -1 \end{vmatrix}$$

を得る。右辺の2つの行列式のうち、第1項は $x\Delta_{A_{k-1}}(x)$ に一致する。第2項の行列式は、下三角型であるから、$(-1)^{k-1}$ に等しい。よって、帰納法の仮定により、

$$\begin{aligned} \Delta_{A_k}(x) &= x\Delta_{A_{k-1}}(x) + (-1)^{k+1}c_k \cdot (-1)^{k-1} \\ &= x(x^{k-1} + c_1x^{k-2} + \cdots + c_{k-2}x + c_{k-1}) + c_k \end{aligned}$$

を得る。これで、数学的帰納法が完成した。 □

有限次元ベクトル空間上の線形変換の固有値は固有多項式を解くことによって求められる。

定理 10-2-2

V $(\neq \{0_V\})$ を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし、$T : V \longrightarrow V$ を $\mathbb{K}$-線形変換とする。このとき、$\alpha \in \mathbb{K}$ が T の固有値であるための必要十分条件は $\Delta_T(\alpha) = 0$ となることである。

(証明)

V の基底 $\mathscr{B} = $ “$v_1, \cdots, v_n$” を1つ固定し、$\mathscr{B}$ に関する V の座標系 $\Phi : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ を考える。A を $\mathscr{B}$ に関する T の行列表示とするとき、$\Phi \circ T = T_A \circ \Phi$ が成り立つ。したがって、$v \in V$ が $T(v) = \alpha v$ を満たすことと、$\mathbf{x} = \Phi(v) \in \mathbb{K}^n$ が $A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}$ を満たすこととは同値である。$A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}$ は

(10-2 d) $$(\alpha E_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

と書き換えることができる。したがって、$\alpha \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned} \alpha \text{ が } T \text{ の固有値} &\iff \alpha \text{ が } A \text{ の固有値} \\ &\iff \text{連立一次方程式 } (\alpha E_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ が非自明な解を持つ} \\ &\iff \Delta_T(\alpha) = 0. \end{aligned}$$

□

注意. 上の証明の中でも述べられているように、$\alpha \in \mathbb{K}$ に対して次が成り立つ：

(10-2 e) $$\Phi\big(W(\alpha, T)\big) = W(\alpha, T_A).$$

これより、T の固有値 α に属する固有空間 $W(\alpha, T)$ を求めるには、A の $\mathbb{K}^n$ における固有空間 $W(\alpha, T_A)$ を求めて、それを Φ^{-1} で V に戻せばよい。$W(\alpha, T_A)$ は連立一次方程式 (10-2 d) の解空間であるから、係数行列 $\alpha E_n - A$ を行基本変形することで求められる。

● 10 - 3：不変部分空間

固有空間が持っている重要な性質を述べるために、新しい概念を導入しよう。

定義 10 - 3 - 1
V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし、$T : V \longrightarrow V$ を $\mathbb{K}$-線形変換とする。V の部分空間 W が ***T*-不変**であるとは、$T(W) \subset W$ となるときをいう。

例 10 - 3 - 2 V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし、$T : V \longrightarrow V$ を $\mathbb{K}$-線形変換とする。任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して、$W(\alpha) = \{ v \in V \mid T(v) = \alpha v \}$ は T-不変部分空間である。

(**証明**)
任意の $v \in W(\alpha)$ に対して、$T(T(v)) = T(\alpha v) = \alpha T(v)$ であるから $T(v) \in W(\alpha)$ となる。よって、$T(W(\alpha)) \subset W(\alpha)$ が成り立つ。 □

W が V の T-不変部分空間ならば、各 $w \in W$ に対して $T(w) \in W$ を対応させる W 上の $\mathbb{K}$-線形変換 $T|_W : W \longrightarrow W$ が定義される。$W = W(\alpha)$ の場合には、次のようになる：

$$T|_{W(\alpha)} = \alpha \, \mathrm{id}_{W(\alpha)} : W(\alpha) \longrightarrow W(\alpha).$$

● 10 - 4：固有多項式と不変部分空間

定理 10 - 4 - 1
$\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間 V $(\neq \{0_V\})$ が

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_l$$

のように T-不変部分空間 $W_1, \cdots, W_l$ の直和で書けているとする。このとき、T の固有多項式と $T|_{W_j}$ $(j = 1, \cdots, l)$ の固有多項式について、次の等式が成り立つ：

(10 - 4 a)
$$\varDelta_T(x) = \varDelta_{T|_{W_1}}(x) \cdots \varDelta_{T|_{W_l}}(x).$$

(**証明**)
任意の $v \in V$ は $v = w_1 + \cdots + w_l$ $(w_j \in W_j,\ j = 1, \cdots, l)$ と書かれ、$T(v)$ は $T(v) = T|_{W_1}(w_1) + \cdots + T|_{W_l}(w_l)$ のように表わされるから、T は $T|_{W_1}, \cdots, T|_{W_l}$ の直和に分解される：$T = T|_{W_1} \oplus \cdots \oplus T|_{W_l}$.

よって、各 W_j から基底 $\mathscr{B}_j$ をとって、それらを並べて V の基底 $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathscr{B}_l$ を作ると、この基底に関する T の行列表示は次の形になる：

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \text{\huge O} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge O} & & & A_l \end{pmatrix}$$

ここで、A_j $(j = 1, \cdots, l)$ は W_j の基底 $\mathscr{B}_j$ に関する $T|_{W_j}$ の行列表示である。$n_j = \dim W_j$ とおき、$n = n_1 + \cdots + n_l$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned} \varDelta_T(x) &= \begin{vmatrix} xE_{n_1} - A_1 & & & \text{\huge O} \\ & xE_{n_2} - A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge O} & & & xE_{n_l} - A_l \end{vmatrix} \\ &= |xE_{n_1} - A_1| \cdot |xE_{n_2} - A_2| \cdots |xE_{n_l} - A_l| \\ &= \varDelta_{T|_{W_1}}(x) \varDelta_{T|_{W_2}}(x) \cdots \varDelta_{T|_{W_l}}(x). \end{aligned}$$

□

線形代数 4 事前練習用演習問題

pre10-1. 写像 $\mathbf{f}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}^3$ が微分可能であるとは、$\mathbb{R}$ から $\mathbb{C}^3=(\mathbb{R}^2)^3=\mathbb{R}^6$ への写像として微分可能なときをいう。このような写像全体のなす複素ベクトル空間を V とおく。

i を虚数単位とし、3 次複素正方行列 $A=\begin{pmatrix}0 & i & 1\\ -i & 0 & i\\ 1 & -i & 0\end{pmatrix}$ を考え、

$$W=\left\{\ \mathbf{x}\in V\ \middle|\ \frac{d\mathbf{x}}{dt}=A\mathbf{x}\ \right\}$$

とおく。すると、任意の $\mathbf{a}\in\mathbb{C}^3$ に対して $\mathbf{x}(0)=\mathbf{a}$ を満たす $\mathbf{x}\in W$ が一意的に存在する。このことを既知として以下の問いに答えよ。

(1) $\mathbb{C}^3$ の標準基底 "$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$" に対して、$\mathbf{x}_i(0)=\mathbf{e}_i$ $(i=1,2,3)$ を満たす $\mathbf{x}_i\in W$ をとると、"$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3$" は W の基底をなすことを示せ。

(2) $\mathbb{C}$-線形変換 $D:W\longrightarrow W$ を $D(\mathbf{x})=\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}$ $(\mathbf{x}\in W)$ により定義する。(1) の W の基底 "$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3$" に関する D の行列表示を求めよ。

(3) D の固有値とそれに属する固有空間を求めよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre10-1. (1) [定理 7-3-2](2) の証明と同様にすれば、証明することができる。

● "$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3$" が W を張ること：

任意に $\mathbf{x}\in W$ をとり、$\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3$ とおく。このとき、初期条件を満たす解の一意性より、

$$\mathbf{x}=a_1\mathbf{x}_1+a_2\mathbf{x}_2+a_3\mathbf{x}_3$$

であることがわかる。

● "$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3$" が $\mathbb{C}$ 上一次独立であること：

$$t_1\mathbf{x}_1+t_2\mathbf{x}_2+t_3\mathbf{x}_3=\mathbf{0}\quad(t_1,t_2,t_3\in\mathbb{C})$$

とおくと、両辺に $0\in\mathbb{R}$ を代入することにより、$\begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ を得る。よって、$t_1=t_2=t_3=0$ となり、"$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3$" が $\mathbb{C}$ 上一次独立である。

(2) $D(\mathbf{x}_1)=\dfrac{d\mathbf{x}_1}{dt}=A\mathbf{x}_1$ である。$A\mathbf{x}_1(0)=A\mathbf{e}_1=-i\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$ であるから、

$$D(\mathbf{x}_1)=-i\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3$$

となることがわかる。同様にして、

$$D(\mathbf{x}_2)=i\mathbf{x}_1-i\mathbf{x}_3,$$
$$D(\mathbf{x}_3)=\mathbf{x}_1+i\mathbf{x}_2$$

がわかる。よって、W の基底 "$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3$"に関する D の行列表示は A に一致する。

(3) D の固有値を求める。(2) より、D の固有多項式は A の固有多項式に一致する。計算により、$\Delta_D(x)=|xE_3-A|=(x-1)^2(x+2)$ のように因数分解されることがわかる。よって、D の ($\mathbb{C}$ 内の) 固有値は $1,-2$ である。

D の固有空間を求める。そのためには、$\mathbb{C}$-線形変換 $T_A : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ の固有空間を求めて、それを (1) の基底に関する座標系 $\Phi : W \longrightarrow \mathbb{C}^3$ を用いて W に引き戻せばよい。

• 固有値 1 に属する固有空間 $W(1, D)$ を求める。

$$1E_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ i & 1 & -i \\ -1 & i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{①}\times 1+\text{③}]{\text{①}\times(-i)+\text{②}} \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから、連立一次方程式 $(1E_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の複素数解を求めて、

$$W(1, T_A) = \left\{ \, s \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{C} \, \right\}$$

であることがわかる。座標系 Φ の下で、

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow i\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3$$

であり、$\mathbf{f}_1 := i\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2,\ \mathbf{f}_2 := \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3$ とおくと、$\mathbf{f}_i \in W(1, D)$ であるから、$\dfrac{d\mathbf{f}_i}{dt} = \mathbf{f}_i \ (i = 1, 2)$ が成り立つ。よって、

$$\mathbf{f}_i = \begin{pmatrix} c_{1i}e^t \\ c_{2i}e^t \\ c_{3i}e^t \end{pmatrix} \quad (c_{1i}, c_{2i}, c_{3i} \in \mathbb{C})$$

と書くことができるが、$\mathbf{f}_1(0) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから、$c_{1i}, c_{2i}, c_{3i} \in \mathbb{C}\ (i = 1, 2)$ が求まり、

$$\mathbf{f}_1(t) = \begin{pmatrix} ie^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

となることがわかる。この $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ を用いて、$W(1, D)$ は次のように与えられることがわかる：

$$W(1, D) = \{ \ s\mathbf{f}_1 + +t\mathbf{f}_2 \mid s, t \in \mathbb{C} \ \}.$$

• 固有値 -2 に属する固有空間 $W(-2, D)$ を求める。行基本変形により

$$-2E_3 - A = \begin{pmatrix} -2 & -i & -1 \\ i & -2 & -i \\ -1 & i & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{①} \leftrightarrow \text{③}} \begin{pmatrix} -1 & i & -2 \\ i & -2 & -i \\ -2 & -i & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & i & -2 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるから、連立一次方程式 $(-2E_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の複素数解を求めて、

$$W(-2, T_A) = \left\{ \, t \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{C} \, \right\}$$

であることがわかる。固有値 1 のときと同様に考えて、$\mathbf{f}_3 := -\mathbf{x}_1 - i\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$ とおくと、$\mathbf{f}_3 \in W(-2, D)$ であることと $\mathbf{f}_3(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$ より、$\mathbf{f}_3(t) = \begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ -ie^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ と表わされることがわかり、この $\mathbf{f}_3$ を用いて、$W(-2, D)$ は次のように与えられることがわかる：

$$W(-2, D) = \{ \ t\mathbf{f}_3 \mid t \in \mathbb{C} \ \}.$$

線形代数４・第 10 回 (2025 年 12 月 1 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数４・第 10 回学習内容チェックシート

2025 年 12 月 1 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし、T を V 上の $\mathbb{K}$-線形変換とする。$\alpha \in \mathbb{K}$ に対して、V の部分空間 $W(\alpha, T)$ を

$$W(\alpha, T) = \{ v \in V \mid T(v) = \alpha v \}$$

と定める。

(1) T の固有値とは何か。その定義を書け。

(2) T の固有値 α に属する固有空間、固有ベクトルとは何か。それぞれの定義を書け。

固有空間: ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　固有ベクトル: ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q2. V を $\mathbb{K}$ 上の n 次元ベクトル空間とし、T を V 上の $\mathbb{K}$-線形変換とする。

(1) T の固有多項式 $\mathit{\Delta}_T(x)$ はどのように定義されるか？

(2) T の固有値を求めるための有効な手順を説明せよ。

(3) T の固有値 α に属する固有空間を求めるための有効な手順を説明せよ。

Q3. V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし、T を V 上の $\mathbb{K}$-線形変換とする。

(1) V の部分空間 W が T-不変であるとはどのような条件を満たすときをいうか。その条件を書け。

(2) W が V の T-不変な部分空間であるとき、W 上の $\mathbb{K}$-線形変換が制限写像 $T|_W$ により定義される。この写像はどのように定義される写像か。

(3) $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間 V $(\neq \{0\})$ が T-不変部分空間 W_1, W_2, W_3 の直和であるとする：$V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$. このとき、$T$ の固有多項式 $\mathit{\Delta}_T(x)$ と $T|_{W_j}$ $(j = 1, 2, 3)$ の固有多項式 $\mathit{\Delta}_{T|_{W_j}}(x)$ の間にどのような関係式は成立するか。

Q4. 第 10 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。