

§10. 長方形領域上での重積分

この節以降では、2変数関数の積分、すなわち、重積分について学ぶ。ここでは、長方形領域上で定義された関数に対する重積分の定義を述べ、連続関数に対しては、重積分の値が1変数関数の定積分を2回行うことで求められることを説明する。

● 10-1：長方形領域とその分割

閉区間 $[a, b]$ と閉区間 $[c, d]$ に対して、 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $[a, b] \times [c, d]$ を

$$(10-1 \text{ a}) \quad [a, b] \times [c, d] = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \}$$

によって定義する。 $[a, b] \times [c, d]$ を**長方形領域**と呼ぶ。

長方形領域 $R = [a, b] \times [c, d]$ の**分割** Δ とは、 a から始まって b で終わる狭義単調増加な有限数列

$$\Delta^{(1)} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$$

と c から始まって d で終わる狭義単調増加な有限数列

$$\Delta^{(2)} : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d$$

との組のことをいう。これは長方形領域 R を座標軸に平行な直線によって、 mn 個の小さな長方形

$$(10-1 \text{ b}) \quad R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$$

に分割したものを表わしている。

$$|\Delta| = \max\{x_1 - x_0, \dots, x_m - x_{m-1}, y_1 - y_0, \dots, y_n - y_{n-1}\}$$

を分割 Δ の**細かさ**と呼ぶ。ここで、 $\max$ は最大なものを表わす記号である。

● 10-2：リーマン和

$f(x, y)$ を長方形領域 $R = [a, b] \times [c, d]$ を定義域に含む関数とする。 R の分割

$$\Delta : \begin{cases} a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b, \\ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d \end{cases}$$

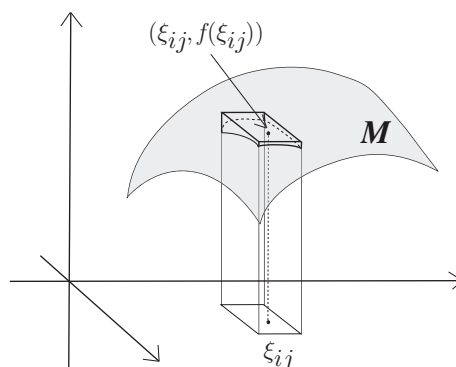
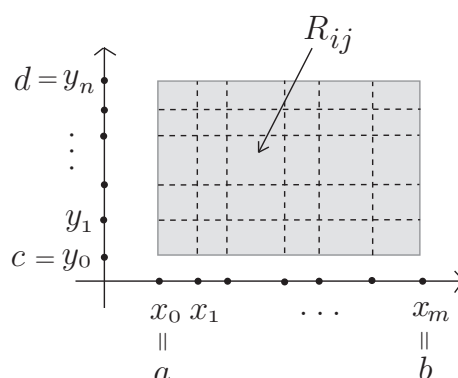
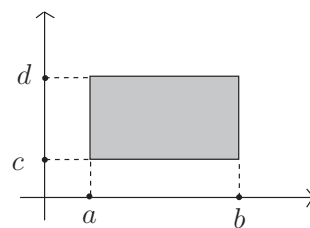
と、各小長方形領域 $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ から任意に一点 ξ_{ij} を取って作った点列 $\xi = \{\xi_{ij}\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ に対して、実数

$$(10-2 \text{ a}) \quad S(f; \Delta, \xi) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_{ij}) \mu(R_{ij})$$

を分割 Δ とそれにフィットする点列 ξ に関する $f(x, y)$ の**リーマン和**という。ここで、

$$(10-2 \text{ b}) \quad \mu(R_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \quad (R_{ij} \text{ の面積})$$

である（注：教科書では R_{ij} の面積を $|R_{ij}|$ という記号で表わしている）。



● 10-3：分割の細分

長方形領域 $R = [a, b] \times [c, d]$ の分割 Δ は、閉区間 $[a, b]$ の分割

$$\Delta^{(1)} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$

と閉区間 $[c, d]$ の分割

$$\Delta^{(2)} : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

から作られているものとする。

分割 $\Delta^{(1)}$ の分点でない $s \in [a, b]$ をとると、 $x_{i-1} < s < x_i$ を満たす i がただ一つ存在するので、 $[a, b]$ の新しい分割

$$\Delta^{(1)}[s] : a = x_0 < \cdots < x_{i-1} < s < x_i < \cdots < x_m = b$$

を作ることができる。 $\Delta^{(1)}[s]$ と $\Delta^{(2)}$ によって与えられる R の分割を Δ の**初等細分**と呼ぶ。

同様に、 $[c, d]$ の分割 $\Delta^{(2)}$ の分点でない $t \in [c, d]$ をとると、 $[c, d]$ の新しい分割 $\Delta^{(2)}[t]$ が得られる。 $\Delta^{(1)}$ と $\Delta^{(2)}[t]$ によって与えられる R の分割も Δ の**初等細分**と呼ぶ。

初等細分を有限回繰り返して得られる分割を Δ の**細分**という。

● 10-4：長方形領域での積分

$f(x, y)$ を定義域の中に長方形領域 $R = [a, b] \times [c, d]$ を含む関数とする。 R の分割 Δ とそれにフィットする点列 ξ をとり、リーマン和 $S(f; \Delta, \xi)$ を考える。 $N \rightarrow +\infty$ のとき $|\Delta_N| \rightarrow 0$ となるように Δ を細分していった R の分割の列 $\Delta = \Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots$ を作り、各 Δ_N に対してそれにフィットする点列 ξ_N を選ぶとき、リーマン和 $S(f; \Delta_N, \xi_N)$ が

- ① Δ の細分の列 $\Delta = \Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots$ の取り方
- ② 各細分 Δ_N にフィットする点列 ξ_N の選び方
- ③ 最初の分割 Δ とそれにフィットする点列 ξ の取り方

によらずにある値 γ に限りなく近づいていく場合、関数 $f(x, y)$ は R 上で(リーマン) **積分可能**であるという。この値 γ を R における $f(x, y)$ の**重積分**といい、

$$(10-4 \text{ a}) \quad \int_R f(x, y) dx dy$$

によって表わす： $\gamma = \int_R f(x, y) dx dy$.

注意 10-4-1 教科書では、(10-4 a) を

$$(10-4 \text{ b}) \quad \iint_R f(x, y) dx dy$$

と記している。どちらの記号を用いてもよい。

例 10-4-2 $\alpha \in \mathbb{R}$ への定数関数 $f(x, y) = \alpha$ を考える。この場合、 $R = [a, b] \times [c, d]$ の分割 Δ とそれにフィットする点列 $\xi = \{\xi_{ij}\}_{i,j}$ に関する $f(x, y)$ のリーマン和は、

$$S(f; \Delta, \xi) = \sum_{i,j} f(\xi_{ij}) \mu(R_{ij}) = \sum_{i,j}^n \alpha \mu(R_{ij}) = \alpha(b-a)(d-c)$$

となり、 Δ, ξ の選び方によらない。したがって、定数関数 $f(x, y) = \alpha ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ は、任意の長方形領域 R 上で積分可能あり、値は $\int_R f(x, y) dx dy = \alpha \mu(R)$ である。但し、 $\mu(R)$ は R の面積を表わす。□

● 10-5：重積分可能性

1 変数の場合と同様に次が成立する。

定理 10-5-1

$R = [a, b] \times [c, d]$ 上で連続な関数は積分可能である。 R 上で連続でなくても、不連続な点が有限個であれば、やはり、積分可能である。

定理の証明は、煩雑になるので、ここでは省略する。証明は微積分学に関する本格的な教科書（例えば、米田薫・谷口和夫・木坂正史『じっくり学べる微分・積分』p.185）などを参照。

● 10-6：累次積分による計算

長方形領域で積分可能な関数の重積分は、1 変数関数の定積分を2度計算することによって、求めることができる。

定理 10-6-1

$f(x, y)$ を定義域の中に長方形領域 $R = [a, b] \times [c, d]$ を含む連続関数とする。このとき、次式が成立する。

$$(10-6 a) \quad \int_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

この定理の証明はここでは省略するが、定理の意味を簡単に説明しておこう。

$f(x, y)$ はそのグラフが右図で与えられる連続関数としておこう（必要ならば十分大きな定数を加えて、 R 上で $f(x, y) > 0$ となるようにしておく）。
重積分

$$\int_R f(x, y) dx dy$$

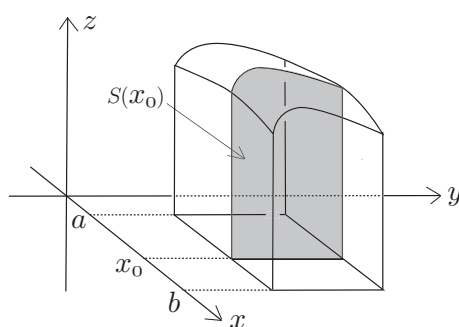
は、その定義から、幾何学的には、 (x, y, z) -空間において方程式 $z = f(x, y)$ によって定まる曲面と直方体 $[a, b] \times [c, d] \times [0, K]$ （但し、 K は十分大きな正の定数）とで囲まれる“下側の”部分の立体 V の体積を表わしていると考えられる。

一方、各 $x_0 \in [a, b]$ に対して、積分

$$(10-6 b) \quad \int_c^d f(x_0, y) dy$$

は V を方程式 $x = x_0$ によって表わされる平面 H で切断したときの断面積 $S(x_0)$ を表わしていると考えられる。したがって、積分

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b S(x) dx$$



は立体 V の体積に等しいはずである。これは等式

$$(10-6\ c) \quad \int_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

が成立することを示唆している。等式

$$(10-6\ d) \quad \int_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

も同様にして理解することができる。

例 10-6-2 $\int_{[0,1] \times [1,3]} \frac{x^3}{y} dx dy = \int_1^3 \left(\int_0^1 \frac{x^3}{y} dx \right) dy = \int_1^3 \left[\frac{x^4}{4y} \right]_0^1 dy = \dots = \frac{\log 3}{4}. \quad \square$

● 10-7：重積分の性質

次の定理は重積分の定義からすぐにわかる。

定理 10-7-1

$f(x, y), g(x, y)$ を定義域の中に長方形領域 $R = [a, b] \times [c, d]$ を含む連続関数とする。このとき、

(1) (線形性)

(i) $\int_R (f(x, y) + g(x, y)) dx dy = \int_R f(x, y) dx dy + \int_R g(x, y) dx dy.$

(ii) 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して、 $\int_R \alpha f(x, y) dx dy = \alpha \int_R f(x, y) dx dy.$

(2) (単調性) 任意の $(x, y) \in R$ に対して $f(x, y) \leq g(x, y)$ ならば、

$$(10-7\ a) \quad \int_R f(x, y) dx dy \leq \int_R g(x, y) dx dy.$$

(3) (加法的性) R に含まれる長方形領域 R_1, R_2 が

- $R_1 = [a, s] \times [c, d], R_2 = [s, b] \times [c, d]$ (但し $a < s < b$)、あるいは、
- $R_1 = [a, b] \times [c, t], R_2 = [a, b] \times [t, d]$ (但し $c < t < d$)

によって与えられているとき、

$$(10-7\ b) \quad \int_R f(x, y) dx dy = \int_{R_1} f(x, y) dx dy + \int_{R_2} f(x, y) dx dy.$$

重積分の加法的性公式 (10-7 b) を繰り返し用いると、例えば、 R を右図のように小長方形領域 R_i ($i = 1, \dots, 5$) に分割したとき、

$$\int_R f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^5 \int_{R_i} f(x, y) dx dy$$

となることがわかる。

R_1	R_2	
	R_4	R_5
R_3		

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎 2）第 10 回・学習内容チェックシート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

Q1. 次の に適当な言葉や数式を入れなさい。

- $f(x, y)$ を長方形領域 $R = [a, b] \times [c, d]$ を定義域に含む関数とすると、 R の分割

$$\Delta : \begin{cases} a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b, \\ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d \end{cases}$$

と、それにフィットする点列 $\xi = \{\xi_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ に関する $f(x, y)$ のリーマン和 $S(f; \Delta, \xi)$ は

$S(f; \Delta, \xi) =$.

- 長方形領域 R 上で な関数は重積分可能である。このとき、重積分 $\int_R f(x, y) dx dy$ は R の分割を細かくしていったときの の極限として定義される。
- 重積分は線形性、単調性、加法性という 3 つの性質を持つ。

線形性は次の 2 つの等式からなる。

単調性とは、重積分の下で大小関係が保たれることを表わす、次の性質のことをいう。

$f(x, y) \leq g(x, y) \quad ((x, y) \in R)$ のとき

加法性とは、次の性質のことをいう： R を

R_1	R_2
-------	-------

 のように 2 つの長方形領域 R_1, R_2 に分けたとき

Q2. 次の表を完成させなさい。

	解決方法・方針
長方形領域 $R = [a, b] \times [c, d]$ 上で定義された連続関数 $f(x, y)$ の重積分を計算するには？	

Q3. 第 10 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。