§11. 行列式と面積・体積

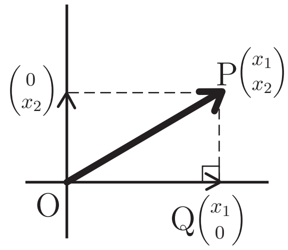
ここでは、主に 2 次と 3 次の行列式の幾何学的な意味を調べる。そのために、ベクトルの長さと内積を、3 次ベクトルに対しては長さと内積に加えて外積を用いるので、これらの概念も合わせて説明する。

● 11 - 1 : ベクトルの長さと 2 点間の距離

平面ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ の長さ $\|\mathbf{x}\|$ とは、原点 O$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と点 P$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を結ぶ線分の長さのことをいう。下図左の直角三角形 $\triangle$OPQ にピタゴラスの定理を適用して、長さ $\|\mathbf{x}\|$ は

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

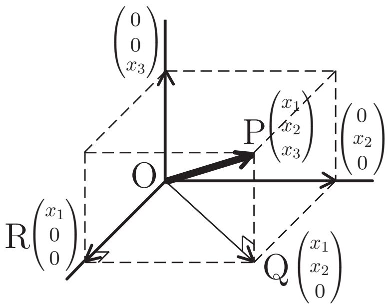
で与えられることがわかる。



同様に、空間ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の長さとは、原点 O$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と点 P$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を結ぶ線分の長さのことをいう。$\mathbf{x}$ の長さ $\|\mathbf{x}\|$ は、下図右の $\triangle$OQR と $\triangle$OPQ にピタゴラスの定理を用いて

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

で与えられることがわかる。



この考え方を一般化して、n 次ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ の長さ $\|\mathbf{x}\|$ を

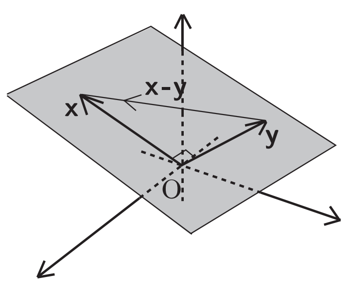
(11 - 1 a) $$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

により定義する。$\|\mathbf{x}\|$ は、点 P$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ が原点 O$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ からどのくらい離れているかを測る値である。一般に、$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して、$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ を $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の間の **(ユークリッド) 距離**という。これは、(始点を原点 O にとったときの) 位置ベクトルが $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ であるような 2 点 P, Q の間がどのくらい離れているかを表わしている。

● 11 - 2 : ベクトルの内積と直交条件

2 つの n 次ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ がどのような条件を満たすとき、直交していると呼べるのかを考察しよう。

$n = 2$ のときには、ピタゴラスの定理から $\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$ が成り立つときに限って $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は直交することがわかる。一般の n の場合には、$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ によって張られる平面に



ついて同様の考察を行えばよい (右図参照) ので、次の言い換えが成立する：

$$\mathbf{x} \text{ と } \mathbf{y} \text{ が直交する} \iff \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$$

(11 - 2 a)
$$\iff x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = 0.$$

今、

(11 - 2 b)
$$\langle \mathbf{x},\ \mathbf{y}\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \ \left(= \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \text{ とも書ける} \right)$$

とおき、これを $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ との**内積**という。内積は次の性質を持つ：任意の $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^n$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して、

(IP1) $\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2,\ \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}_1,\ \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{x}_2,\ \mathbf{y}\rangle$, $\langle \mathbf{x},\ \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2\rangle = \langle \mathbf{x},\ \mathbf{y}_1\rangle + \langle \mathbf{x},\ \mathbf{y}_2\rangle$.

(IP2) $\langle t\mathbf{x},\ \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x},\ t\mathbf{y}\rangle = t\langle \mathbf{x},\ \mathbf{y}\rangle$.

内積の記号を使うと、(11 - 2 a) は

(11 - 2 c)
$$\mathbf{x} \text{ と } \mathbf{y} \text{ が直交する} \iff \langle \mathbf{x},\ \mathbf{y}\rangle = 0$$

と書き換えられる。(11 - 2 c) をベクトルが直交することの定義と思って差し支えない。特に、$\mathbf{x}$ あるいは $\mathbf{y}$ が零ベクトルのときには、(11 - 2 c) の右辺は成立するから、零ベクトルは任意のベクトルと直交する。

注意. 内積は、高校では $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ のように表わすが、大学では複雑な形のベクトルの内積も扱うため、上記のような $\langle \mathbf{x},\ \mathbf{y}\rangle$ や $(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ が使われる。

● 11 - 3 : 2 次行列式の幾何学的な意味

$\mathbb{R}^2$ において一次独立なベクトルの組 “$\mathbf{a}, \mathbf{b}$” に対して、$\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$D := \{\ s\mathbf{a} + t\mathbf{b} \mid 0 \le s, t \le 1\ \}$$

は平行四辺形を表わす。D を $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ によって張られる平行四辺形と呼ぶのであった。

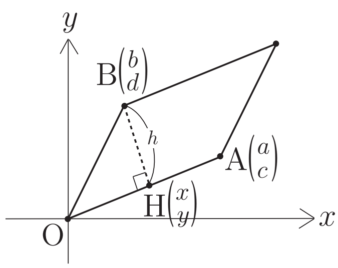
D の面積は、符号を無視すれば、行列式 $|\mathbf{a}\ \mathbf{b}|$ に等しい。すなわち、次が成り立つ。

命題 11 - 3 - 1
“$\mathbf{a}, \mathbf{b}$” を $\mathbb{R}^2$ の中の一次独立なベクトルとし、$A = (\mathbf{a}\ \mathbf{b})$ とおく。このとき、$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ によって張られる平行四辺形 P の面積は、$|A|$ の絶対値に等しい。

(証明)

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおく。また、O を $\mathbb{R}^2$ の原点とし、点 A, B を $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \mathbf{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \mathbf{b}$ となるように定める。点 B から辺 OA に下ろした垂線の足を H とし、$\mathbf{x} = \overrightarrow{\mathrm{OH}}$ とおく。

H は O, A を通る直線上にあるから、



(※ 1)
$$\mathbf{x} = t\mathbf{a} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と書ける。また、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ は直交するから、

(※ 2)
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{x}\rangle = 0$$

である。(※ 2) に (※ 1) を代入して、$t = \dfrac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle}$ を得る。

したがって、線分 BH の長さ h は

$$h = \|\mathbf{b} - \mathbf{x}\| = \left\| \mathbf{b} - \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle}\mathbf{a} \right\| = \frac{1}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle} \|\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle\mathbf{b} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle\mathbf{a}\|$$

である。よって、平行四辺形 P の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \mathrm{OA}\cdot h = \|\mathbf{a}\|\cdot\frac{\|\langle\mathbf{a},\mathbf{a}\rangle\mathbf{b}-\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle\mathbf{a}\|}{\langle\mathbf{a},\mathbf{a}\rangle} = \frac{\|\langle\mathbf{a},\mathbf{a}\rangle\mathbf{b}-\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|} \\ &= \frac{\sqrt{\langle\mathbf{a},\mathbf{a}\rangle^2\langle\mathbf{b},\mathbf{b}\rangle+\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle^2\langle\mathbf{a},\mathbf{a}\rangle-2\langle\mathbf{a},\mathbf{a}\rangle\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle^2}}{\|\mathbf{a}\|} \\ &= \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2-\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle^2} \end{aligned}$$

を得る。

$$\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2-\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle^2 = (a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ab+cd)^2 = (ad-bc)^2$$

と書けるから、$S=|ad-bc|$ を得る (ここの | | は絶対値を表わす)。 □

● 11 - 4 : 3 次ベクトルの外積

3 次行列式の幾何学的な意味を考察するために、外積を導入する。3 次ベクトル

$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ に対して、$\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\begin{pmatrix}x_2y_3-y_2x_3\\x_3y_1-y_3x_1\\x_1y_2-y_1x_2\end{pmatrix}$ を $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ との**外積**と呼ぶ。

補題 11 - 4 - 1

$\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3$ に対して

(1) 外積 $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ は $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の両方に直交する。

(2) ”$\mathbf{x},\mathbf{y}$” が一次独立であるとき、この 2 つのベクトルによって張られる平行四辺形の面積を S とおくと $S=\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|$.

(3) ”$\mathbf{x},\mathbf{y}$” が一次独立であるとき、$|\mathbf{x}\ \mathbf{y}\ \mathbf{x}\times\mathbf{y}|>0$ である。

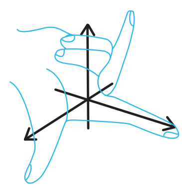
(証明)

(1) $\mathbf{x},\mathbf{y}$ を成分で表わして、内積 $\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\times\mathbf{y}\rangle$, $\langle\mathbf{y},\mathbf{x}\times\mathbf{y}\rangle$ を計算すると 0 になることがわかる。

(2) [命題 11 - 3 - 1] の証明より、$S=\sqrt{\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2-\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle^2}$ である。$\mathbf{x},\mathbf{y}$ を成分で表わして計算することにより、$\sqrt{\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2-\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle^2}$ は $\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|$ に一致することがわかる。

(3) 簡単な計算 (第 3 列に関する余因子展開) により、$|\mathbf{x}\ \mathbf{y}\ \mathbf{x}\times\mathbf{y}|=\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|^2\geq 0$ がわかる。もし、$\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|^2=0$ であったとすると、$\mathbf{x},\mathbf{y}$ を成分で表わして計算することにより、$\mathbf{x},\mathbf{y}$ のうち一方が他方の定数倍になることがわかる。これは “$\mathbf{x},\mathbf{y}$” が一次独立であることに矛盾する。したがって、$|\mathbf{x}\ \mathbf{y}\ \mathbf{x}\times\mathbf{y}|=\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|^2>0$ である。 □

注意. 補題の (3) により、“$\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{x}\times\mathbf{y}$” は右手系をなす。これは、$\mathbf{x},\mathbf{y}$ の方向をそれぞれ右手の親指、人差し指の方向に合わせると、$\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ の方向が中指の方向になることを意味している。



● 11 - 5 : 3 次行列式の幾何学的な意味

$\mathbb{R}^3$ における 3 つのベクトル $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ のなす組 “$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$” が**一次独立**であるとは、$s\mathbf{a}+t\mathbf{b}+u\mathbf{c}=\mathbf{0}$ を満たす $s,t,u\in\mathbb{R}$ が $s=t=u=0$ のみであるときをいう。この条件は、$\mathbf{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となるように点 A, B, C をとるとき、4 点 O, A, B, C が同一平面上にないことと同値である。

今、$\mathbb{R}^3$ の一次独立なベクトルの組 “$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$” に対して $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$P := \{\ s\mathbf{a}+t\mathbf{b}+u\mathbf{c}\mid 0\leq s,t,u\leq 1\ \}$$

を考える。P を $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ によって張られる平行六面体と呼ぶ。P の体積は、符号を無視すれば、行列式 $|\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}|$ に等しい。すなわち、次が成り立つ。

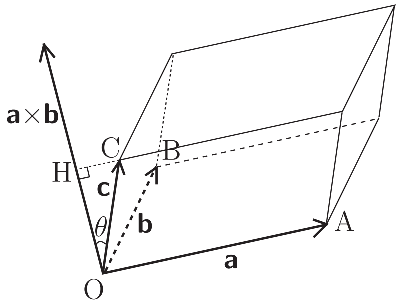
命題 11 - 5 - 1

“$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$” を $\mathbb{R}^3$ の中の一次独立なベクトルとし、$A=(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c})$ とおく。このとき、$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ によって張られる平行六面体 P の体積は、$|A|$ の絶対値に等しい。

(証明)

点 A, B, C を、$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ が原点 O を始点としたときの位置ベクトルとなるように、空間内にとる。$\mathbf{a},\mathbf{b}$ によって張られる平行四辺形の面積を S とおくと、$S=\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|$ が成り立つ。

原点 O を通り、$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ を方向ベクトルとする直線を L とし、点 C から L へ下ろした垂線の足を H とする。$\theta=\angle\mathrm{HOC}$ とおくと、$\mathrm{OH}=\|\mathbf{c}\||\cos\theta|$ となる。余弦定理により、$\cos\theta=\dfrac{\langle\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle}{\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\|}$ が成り立つから、



$$\mathrm{OH}=\|\mathbf{c}\|\left|\frac{\langle\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle}{\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\|}\right|=\left|\frac{\langle\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle}{\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|}\right|$$

と表わされる。故に、$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ によって張られる平行六面体 P の体積を V とおくと、$V=S\cdot\mathrm{OH}=|\langle\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle|$ となる (ここの $|\ \ |$ は絶対値を表わす)。[補題 11 - 4 - 1](3) の証明と同様に $\langle\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle=|\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}|=|A|$ であることがわかるので、V は A の行列式 $|A|$ の絶対値に等しいことが示された。 □

より一般に、$\mathbb{R}^n$ 内の一次独立なベクトルの組 “$\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n$” に対して $\mathbb{R}^n$ の部分集合

$$P:=\{\ t_1\mathbf{a}_1+\cdots+t_n\mathbf{a}_n \mid 0\le t_1,\cdots,t_n\le 1\ \}$$

を $\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n$ によって張られる平行体と呼ぶ。$A=(\mathbf{a}_1\ \cdots\ \mathbf{a}_n)$ とおくとき、$|A|$ は P の (符号のついた) 体積を表わす (と考えられる)。

● 11 - 6： 行列の積と行列式と面積・体積

正方行列の積と行列式との間には、次の等式が成り立つ。

定理 11 - 6 - 1

n 次正方行列 A と B に対して、$|AB|=|A||B|$.

ここでは、定理の証明はせずに、この定理の幾何学的意味を説明しよう。

n 次実正方行列 A によって定まる線形写像 $T_A:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$, $T_A(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$ を考える。また、“$\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_n$” を $\mathbb{R}^n$ の一次独立なベクトルとし、これらのベクトルによって張られる平行体

$$P=\{\ t_1\mathbf{b}_1+\cdots+t_n\mathbf{b}_n \mid 0\le t_i\le 1\ (i=1,\cdots,n)\ \}$$

を考える。このとき、

$$T_A(P)=\{\ t_1T_A(\mathbf{b}_1)+\cdots+t_nT_A(\mathbf{b}_n) \mid 0\le t_i\le 1\ (i=1,\cdots,n)\ \}$$

となる。$|A|\ne 0$ ならば “$T_A(\mathbf{b}_1),\ \cdots,T_A(\mathbf{b}_n)$” は一次独立なので、$T_A(P)$ は再び平行体になる。

P の (符号つき) 体積は $B=(\mathbf{b}_1\ \cdots\ \mathbf{b}_n)$ とおくと、$|B|$ に等しい。一方、$T_A(\mathbf{b}_i)=A\mathbf{b}_i$ $(i=1,\cdots,n)$ であるから、$T_A(P)$ の (符号つき) 体積は $AB=(A\mathbf{b}_1\ \cdots\ A\mathbf{b}_n)$ の行列式に等しい。つまり、もともと (符号つき) 体積が $|B|$ であった平行体 P が T_A によって (符号つき) 体積が $|AB|$ の平行体 $T_A(P)$ に写されることがわかる。このように考えると、公式 $|AB|=|A||B|$ は、幾何学的には、「線形写像 T_A によって平行体の体積が $|A|$ 倍される」ということを意味する等式であると解釈することができる。