§11. 数列の極限の定義

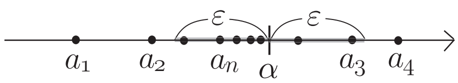
数列の極限に対する厳密な取り扱いを通じて、“$\varepsilon - N$ 論法” を使えるようになることがこの節の目標である。

● 11 - 1 : 数列の極限

高校の教科書では、数列の極限をおおよそ次のように説明している。

> 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ において、項の番号 n を限りなく大きくするとき、a_n が一定の値 α に限りなく近づく場合、α を数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限値といい、
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad a_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$$
> と書く。

「限りなく大きくする」「限りなく近づく」ということは直感的には理解できるが、実際にこれを確かめようとした場合、何をすればよいのか困る。そこで、このようなあいまい表現を使わずに極限の定義を定式化しよう。



数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について考える。これが実数 α に収束する状況を思い浮かべてみよう。まず、α のいくらでも近くに a_n がなければいけない。この「いくらでも近くに a_n がある」ということは、「どのような $\varepsilon > 0$ を与えても、開区間 $(\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon)$ の中に a_n がある」ということであると考えることができる。つまり、$\varepsilon = 1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000}, \cdots$ のように ε をどんどん小さくしていったとしても、開区間 $(\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon)$ の中には必ず a_n があるというわけである。しかし、開区間 $(\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon)$ の中にただ a_n があるというのでは、「収束する」というイメージに合わない。例えば、数列 $\{(-1)^n(1 - \frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty}$ に対して 1 を考えると、どのような $\varepsilon > 0$ を与えても開区間 $(1 - \varepsilon,\ 1 + \varepsilon)$ の中に数列 $\{(-1)^n(1 - \frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty}$ の項が含まれるが、この数列は 1 に収束するわけではない。このような数列を排除して、「収束する」ということのイメージに合うようにするためには、ある番号から先の n についてはすべて、$a_n \in (\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon)$ となっている、すなわち、$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となっていることを要請すればよい。このような考察から、次の定義に到達する。

定義 11 - 1 - 1

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 α に**収束する** (converge) とは、どのような実数 $\varepsilon > 0$ に対しても、次の条件 (11 - 1 a) を満たす自然数 N が存在するときをいう：

(11 - 1 a) $n > N$ を満たすすべての自然数 n について、$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ である。

このとき、α を数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**極限** (limit) または**極限値** (limit value) といい、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad a_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$$

のように書き表わす。また、数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**収束する**とは、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ となる実数 α が存在するときをいう。

注意 1. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束することを、論理記号を使って、

$$「\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \ \text{s.t.}\ \ n > N \ \Rightarrow\ |a_n - \alpha| < \varepsilon」\text{が成り立つ}$$

のように表現する。通常、“ が成り立つ ” の部分は省略する。

注意 2. (11 - 1 a) の代わりに

(11 - 1 b)　　　$n \geq N$ を満たすすべての自然数 n について、$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ である。

を収束の定義に採用する流儀もある。実際、数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と実数 α と任意の正の実数 ε に対して、(11 - 1 a) が成立することと (11 - 1 b) が成立することとは同値である。

演習 11- 1 * 上の注意 2 の後半の主張を確かめよ。

次の結果は「当たり前」と思われるかもしれないが、証明にはアルキメデスの原理と呼ばれる公理が必要になる。これについては次節で説明する。

例 11 - 1 - 2 数列 $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する。

補題 11 - 1 - 3
収束する数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、その極限は一意的である。

(**証明**)

背理法で示す。α, β を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限とし、$\alpha \neq \beta$ であると仮定する。このとき、$|\alpha - \beta| > 0$ である。$\varepsilon := \frac{|\alpha-\beta|}{2}$ とおくと $\varepsilon > 0$ であり、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} a_n = \beta$ より

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \ \text{ s.t.} n > N_1 \ \Rightarrow \ |a_n - \alpha| < \varepsilon,$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \ \text{ s.t.} n > N_2 \ \Rightarrow \ |a_n - \beta| < \varepsilon$$

が成り立つ。今、$n := \max\{N_1, N_2\} + 1$ とおくと $n > N_1$ を満たすから $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立ち、$n > N_2$ を満たすから $|a_n - \beta| < \varepsilon$ が成り立つ。この 2 つの不等式から、不等式

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha - a_n| + |a_n - \beta| < 2\varepsilon = |\alpha - \beta|$$

が導かれるが、これは成立し得ない。よって、$\alpha = \beta$ でなければならない。 □

● 11 - 2 : 数列の収束と有界性

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**有界**であるとは、「すべての自然数 n に対して $|a_n| < K$」を満たす実数 $K > 0$ が存在するときをいう。有界な数列がいつでも収束するとは限らないが、次の命題が示すように、収束する数列は常に有界である。このことは、収束する数列の「とる値の範囲」が (際限なく大きくなったり小さくなったりせずに) ある一定の範囲内に限られることを意味している。

命題 11 - 2 - 1
収束する数列は有界である。

(**証明**)

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束しているとすると、

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ n > N \ \Rightarrow \ |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ。したがって、特に、$\varepsilon = 1$ に対して、「$n > N_0 \ \Rightarrow \ |a_n - \alpha| < 1$」を満たす自然数 N_0 が存在する。このとき、

$$M := \max\{\ |a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N_0}|,\ |\alpha| + 1\ \}$$

とおくと、$M > 0$ であり、すべての $n \in \mathbb{N}$ について $|a_n| \leq M < M + 1$ となる。よって、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である。 □

演習 11-2　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について、$\{a_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ が有界ならば $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ も有界であることを示せ。

● 11-3：数列の和、差、積、商

２つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられたとき、新たに４つの数列

$$\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{a_n-b_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{\tfrac{a_n}{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$$

を作ることができる（但し、４番目の数列はすべての $n \in \mathbb{N}$ について $b_n \neq 0$ のときのみ作ることができる）。この４つの数列を、左から順に、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**和**、**差**、**積**、**商**と呼ぶ。

命題 11-3-1

２つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するとき、$\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{a_n-b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{a_n}{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ はすべて収束して、次式が成り立つ：

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n, \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n), \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

但し、商については、すべての $n \in \mathbb{N}$ について $b_n \neq 0$、かつ、$\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ であるとする。

(**証明**)

和と差については演習問題として残し、積と商について証明する。

• 積について：$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とおく。三角不等式により、任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$|a_nb_n - \alpha\beta| \leq |a_nb_n - a_n\beta| + |a_n\beta - \alpha\beta| = |a_n||b_n-\beta| + |a_n-\alpha||\beta|$$

が成り立つことに注意する。

さて、任意に $\varepsilon > 0$ をとる。$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するので有界である ([命題 11-2-1]) から

$$\exists K > 0 \ \text{ s.t. } \ \forall n \in \mathbb{N}, \ |a_n| < K$$

が成り立つ。（そこで、このような K を１つとる。）$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ なので、$\varepsilon_0 := \frac{\varepsilon}{K+|\beta|} > 0$ に対して、

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ n > N_1 \ \Rightarrow \ |a_n - \alpha| < \varepsilon_0$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ n > N_2 \ \Rightarrow \ |b_n - \beta| < \varepsilon_0$$

が成り立つ。そこで、（上のような N_1, N_2 を１つずつとり、）$N := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、$N \in \mathbb{N}$ であって、$n > N$ を満たすすべての自然数 n に対して、

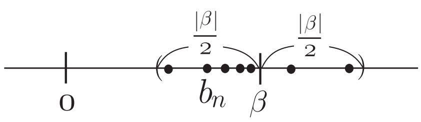
$$|a_nb_n - \alpha\beta| \leq |a_n||b_n-\beta| + |a_n-\alpha||\beta| < K\varepsilon_0 + \varepsilon_0|\beta| = (K+|\beta|)\frac{\varepsilon}{K+|\beta|} = \varepsilon$$

となることがわかる。これで、$\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し、$\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \alpha\beta$ となることが示された。

• 商について：$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ と書けることと (2) から、すべての $n \in \mathbb{N}$ について $b_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \neq 0$ のとき、$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$ となることを証明すればよい。任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{|\beta - b_n|}{|\beta||b_n|}$$

が成り立つことに注意する。



さて、任意に $\varepsilon > 0$ をとる。$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \neq 0$ なので、

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ n > N_1 \ \Rightarrow \ \frac{|\beta|}{2} \leq |b_n|$$

が成り立つ。また、$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ なので、$\varepsilon_0 := \frac{|\beta|^2\varepsilon}{2} > 0$ に対して、

$$\exists\, N_2 \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ n > N_2 \ \Rightarrow \ |b_n - \beta| < \varepsilon_0$$

が成り立つ。そこで、(上のような N_1, N_2 を 1 つずつとり、) $N := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、$N \in \mathbb{N}$ であって、$n > N$ を満たすすべての自然数 n に対して、

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{|\beta - b_n|}{|\beta||b_n|} < \frac{2\varepsilon_0}{|\beta|^2} = \varepsilon$$

となることがわかる。これで、$\{\frac{1}{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し、$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$ となることが示された。 □

注意. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と実数 c から数列 $\{ca_n\}_{n=1}^{\infty}$ を作ることができる。この数列は、$c, c, c, c, \cdots$ という定数列と $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ との積と考えることができる。したがって、上の命題 (2) の特別な場合として、数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するとき、任意の実数 c に対して数列 $\{ca_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し、$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n$ が成り立つことがわかる。

演習 11-3 * [命題 11-3-1] における和と差に関する主張を証明せよ。

例 11-3-2 数列 $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束することを認めた上で、数列 $\{\frac{3n^2-6n+1}{2n^2+5n-4}\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示し、その極限を求めよ。

解;

まず、$\left\{\frac{3n^2-6n+1}{2n^2+5n-4}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{3-\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{5}{n}-\frac{4}{n^2}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ と書き換える。$\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束するから、[命題 11-3-1] により $\{\frac{1}{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$ も収束し、$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = (\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n})^2 = 0$ となる。したがってまた [命題 11-3-1] により $\{3 - \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{2 + \frac{5}{n} - \frac{4}{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$ はともに収束し、$\lim_{n\to\infty}(3 - \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}) = 3$, $\lim_{n\to\infty}(2 + \frac{5}{n} - \frac{4}{n^2}) = 2$ となる。再度 [命題 11-3-1] を用いて、数列 $\{\frac{3n^2-6n+1}{2n^2+5n-4}\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し、$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-6n+1}{2n^2+5n-4} = \frac{\lim_{n\to\infty}(3-\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2})}{\lim_{n\to\infty}(2+\frac{5}{n}-\frac{4}{n^2})} = \frac{3}{2}$ となることがわかる。 □

● 11-4：不等式と極限

与えられた数列が扱いにくくても、それをよくわかっている数列で「上と下からはさみこむ」ことにより、収束することが証明できたり、極限が求められたりするときがある。

命題 11-4-1 (はさみうちの原理)

3 つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が次の (i)(ii) を満たしているとする。

(i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$a_n \leq x_n \leq b_n$.

(ii) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はともに $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束する.

このとき、$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ も α に収束する。

(**証明**)

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ であるから、任意に $\varepsilon > 0$ を与えると、

$$\exists\, N_1 \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ n > N_1 \ \Rightarrow \ |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

$$\exists\, N_2 \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ n > N_2 \ \Rightarrow \ |b_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ。そこで、(上のような N_1, N_2 を 1 つずつとり、) $N := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、$N \in \mathbb{N}$ であって、$n > N$ を満たすすべての自然数 n に対して、

$$\alpha - \varepsilon < a_n \leq x_n \leq b_n < \alpha + \varepsilon$$

が成り立つことがわかる。よって、$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し、その極限は $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ である。 □