§11. 行列の階数と標準形

ここでは、行に関する基本変形だけでなく、列に関する同様の変形も考え、どのような行列も、これらの基本変形の有限回により、“対角線”上に 1 がいくつか並びあとの部分はすべて 0 であるような行列 (これを標準形と呼ぶ) に変形することができることを示す。

● 11 - 1 : 階段行列と階数 (復習)

どのような (m, n)-行列 A に対しても、行基本変形を有限回施すと、次のような形の行列にすることができる (ガウスの消去法の前進部部分に当たる操作を行えばよい)。

(11 - 1 a)
$$B = \begin{pmatrix} a_{1j_1} & & & & \\ & a_{2j_2} & & * & \\ & & a_{3j_3} & & \\ & & & \ddots & \\ & \text{O} & & & a_{rj_r} \\ & & & & \end{pmatrix}$$

但し、$0 \leq r \leq \min\{m, n\}$, $a_{1j_1} \neq 0,\ a_{2j_2} \neq 0,\ a_{3j_3} \neq 0, \cdots, a_{rj_r} \neq 0$ である。上の行列において、第 1 行から第 r 行までは行番号が増えるにつれて左端から連続して並ぶ 0 の個数が確実に増えており、第 $r+1$ 行より下の行はすべて 0 になっている。このような形をした行列を**階段型**と呼ぶ。A に行基本変形をどのような順番で施して階段型にしても、最終的に得られる r は同じになることが知られている。そこで、r を A の**階数** (**ランク**) といい、$\mathrm{rank}\, A$ で表わす。

例 11 - 1 - 1 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は階段型であるが、$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ は階段型ではない。また、$\mathrm{rank}\, A = 2,\ \mathrm{rank}\, B = 3$ である。 □

例 11 - 1 - 2 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に行基本変形を施して $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が得られる。よって、A の階数は $\mathrm{rank}\, A = 3$ である。 □

● 11 - 2 : 基本変形と標準形

行列に対する次の 3 種類の変形を**列基本変形**という。

列基本変形

(Column1) ある列の定数倍を他の列に加える
(Column2) ある列に 0 でない定数を掛ける
(Column3) 2 つの列を入れ替える

行基本変形に加えて列基本変形の使用を許せば、行列はもっと単純な形に変形される。

定理 11 - 2 - 1
すべての (m, n)-行列 A は、行基本変形と列基本変形の有限回によって、次の形の行列に変形される：

(11 - 2 a)
$$F_{m,n}(r) = \begin{pmatrix} E_r & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{1 \ \cdots \ 0}}^{r} & \overbrace{\hphantom{\mathrm{O}}}^{n-r} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \mathrm{O} \\ 0 & \cdots & 1 & \\ & \mathrm{O} & & \mathrm{O} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\} r \\ \left.\vphantom{\mathrm{O}}\right\} m-r \end{array}$$

$F_{m,n}(r)$ $(r = 0, 1, \cdots, \min\{m, n\})$ を (m, n)-行列 A の (階数) **標準形**と呼ぶ。

例 11 - 2 - 2 $(3, 2)$-行列の標準形は $F_{3,2}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F_{3,2}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F_{3,2}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ の 3 つである。

例 11 - 2 - 3 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、途中まで (階段型にするまで) は行基本変形で変形し、最後に列基本変形を行うことにより、次のようにして標準形が得られる。

$$A \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{①\times 2+③} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[③\times\frac{1}{3}]{②\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{②\times(-1)+③} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\boxed{1}\times(-1)+\boxed{4}]{\substack{\boxed{1}\times(-2)+\boxed{2} \\ \boxed{1}\times(-3)+\boxed{3}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\boxed{2}\times(-1)+\boxed{4}]{\boxed{2}\times(-2)+\boxed{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

● 11 - 3 : [定理 11 - 2 - 1] の証明

(m, n)-行列 A $(\neq \mathrm{O})$ に、行基本変形に加えて (必要ならば)「列の入れ替え」を有限回施すと、次の形をした階段行列 B に変形されることがわかる。

(11 - 3 a)
$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & b_{1r+1} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2r} & b_{2r+1} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ & \mathrm{O} & & b_{rr} & b_{rr+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

但し、$b_{11}, b_{22}, \cdots, b_{rr}$ は 0 でない。次に B の各 i 行を $1/b_{ii}$ 倍して次の形の行列に変形する。

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} \\ & 1 & \cdots & c_{2r} & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ & \mathrm{O} & & 1 & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

次に、第 1 列の $-c_{12}$ 倍を第 2 列に加え, $\cdots$, 第 1 列の $-c_{1n}$ 倍を第 n 列に加えて、さら

に、第 2 列の $-c_{23}$ 倍を第 3 列に加え, $\cdots$, 第 2 列の $-c_{2n}$ 倍を第 n 列に加える……。この変形を繰り返せば、最後に標準形が得られる。 □

● 11 - 4 : 列基本変形と基本行列

行列に行基本変形を施す操作は基本行列を左から掛けることにより実現されるが、列基本変形を施す操作は基本行列を右から掛けることにより実現される。

列基本変形	右から掛ける基本行列
第 j 列に第 i 列の $t\ (\neq 0)$ 倍を加える	$P_n(j,i;t)$
第 i 列を $t\ (\neq 0)$ 倍する	$Q_n(i;t)$
第 i 列と第 j 列を入れ換える	$R_n(i,j)$

ここで、$P_n(i,j;t),\ Q_n(i;t),\ R_n(i,j)$ は以下の行列である。

$$P_n(i,j;t)=\left(\begin{array}{ccc|ccccc|ccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\ \hline
 & & & 1 & & & & 0 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & t & & & & 1 & & & \\ \hline
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
 \\ \\ \\ \cdots\cdots\ \text{第 } i \text{ 行目} \\ \\ \\ \\ \cdots\cdots\ \text{第 } j \text{ 行目} \\ \\ \\ \\
\end{array} \tag{11 - 4 a}$$

$$Q_n(i;t)=\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & \text{O} & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & t & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & \text{O} & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
 \\ \\ \\ \cdots\cdots\ \text{第 } i \text{ 行目} \\ \\ \\ \\
\end{array} \tag{11 - 4 b}$$

$$R_n(i,j)=\left(\begin{array}{ccc|ccccc|ccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\ \hline
 & & & 0 & & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & & 0 & & & \\ \hline
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
 \\ \\ \\ \cdots\cdots\ \text{第 } i \text{ 行目} \\ \\ \\ \\ \cdots\cdots\ \text{第 } j \text{ 行目} \\ \\ \\ \\
\end{array} \tag{11 - 4 c}$$

例 11 - 4 - 1 行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ に対して、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ta_{11}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ta_{21}+a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから、A に第 1 列の t 倍を第 3 列に加える列基本変形を施すことは、A に右から基本行列 $P_3(3,1;t)$ を掛けることにより実現される。 □

[定理 11-2-1] から次の定理を得る。

定理 11-4-2

どんな (m,n)-行列 A に対しても、$r = \operatorname{rank} A$ とおくと、$PAQ = F_{mn}(r)$ となる m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q が存在する。

(**証明**)

[定理 11-2-1] により、A に行基本変形と列基本変形を有限回施して標準形 $F_{mn}(r)$ にすることができるから、行基本変形を行うところではそれに対応する基本行列を左から掛けて、列基本変形を行うところでは対応する基本行列を右から掛けていけば、$F_{mn}(r)$ が得られる。よって、行基本変形と列基本変形のそれぞれに対応する基本行列の積を P, Q とおくと、$PAQ = F_{mn}(r)$ となる。基本行列は正則であるから、それらの積である P, Q はどちらも正則である。 □

定理 11-4-3

n 次正方行列 A に対して次の 3 つは互いに同値である：

(1) $\operatorname{rank} A = n$.

(2) A は正則である。

(3) $|A| \neq 0$.

(**証明**)

「(2) $\Longleftrightarrow$ (3)」は [定理 9-2-1] による。「(1) $\Longleftrightarrow$ (3)」を示す。

[定理 11-4-2] により、$PAQ = F_{nn}(r)$ となる n 次正則行列 P, Q が存在する。ここで、$r = \operatorname{rank} A$ である。よって、次を得る：

$$|P| \cdot |A| \cdot |Q| = |PAQ| = |F_{nn}(r)| = \begin{cases} 0 & (r < n \text{ のとき}), \\ 1 & (r = n \text{ のとき}). \end{cases}$$

P, Q は正則であるから、$|P| \neq 0,\ |Q| \neq 0$ である。よって、(1) と (3) は同値である。 □

例 11-4-4 a を定数とし、3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ を考える。$|A|$ を計算すると、$|A| = (1+2a)(1-a)^2$ であることがわかる。よって、

- $a \neq 1, -\frac{1}{2}$ ならば、$|A| \neq 0$ であるから、[定理 11-4-3] により、$\operatorname{rank} A = 3$ である。
- $a = 1$ のときと $a = -\frac{1}{2}$ のときは、それぞれ個別に A を行基本変形し、階段型にすることにより、階数を求めることができる。結果は次のようになる：

$$\operatorname{rank} A = \begin{cases} 3 & (a \neq 1, -\frac{1}{2} \text{ のとき}), \\ 2 & (a = -\frac{1}{2} \text{ のとき}), \\ 1 & (a = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

□

No.11 2024 年 6 月 20 日

線形代数 1 事前練習用演習問題

pre11-1. (行列の標準形と階数)

行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ -2 & 3 & -6 & -2 \\ 3 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

について、

(1) A に有限回行基本変形を施して、階段型にし、$\operatorname{rank} A$ を求めよ。

(2) A の標準形を求めよ。(答えのみは不可。どのような基本変形を施して標準形が得られたのかがわかるように変形の過程を書くこと。)

pre11-2. (正方行列の階数と行列式)

a を実数の定数とする。行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ -2 & a-5 & 0 & -a \\ 1 & 3-a & a-3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

の階数を求めよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre11-1. [例 11 - 1 - 2] と [例 11 - 2 - 3] を参考に解答する。始めはガウスの消去法の前進部分に相当する行基本変形を行って階段型にし、次に、列基本変形を行い、標準形にする。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ -2 & 3 & -6 & -2 \\ 3 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[①\times(-3)+③]{①\times 2+②} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 12 \\ 0 & 10 & 0 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{②\times 10+③} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

よって、$\operatorname{rank} A = 3$ である。

(2) 上で得た階段型行列の各行を、段が降りる所の数が 1 になるように定数倍してから、以下のように列基本変形を施すことで、標準形が得られる。

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} \xrightarrow[③\times\frac{1}{100}]{②\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\boxed{3} \leftrightarrow \boxed{4}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\boxed{1}\times(-3)+\boxed{4}]{\substack{\boxed{1}\times 2+\boxed{2} \\ \boxed{1}\times(-7)+\boxed{3}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\boxed{2}\times(-12)+\boxed{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = F_{3,4}(3)$$

pre11-2. [例 11 - 4 - 4] を参考に解くことができる。

$|A|$ を行列式の性質を用いて、工夫して計算すると、

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ -2 & a-5 & 0 & -a \\ 1 & 3-a & a-3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \cdots\cdots = (a-3)^2(1-a)$$

となることがわかる。したがって、$a \neq 1, 3$ ならば $|A| \neq 0$ であるから、$\operatorname{rank} A = 4$ である。

$a=1,3$ のとき、個別に $\mathrm{rank}\,A$ を計算する。

● $a=1$ のとき、行基本変形により、

$$A \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるから、$\mathrm{rank}\,A=3$ である。

● $a=3$ のとき、行基本変形により、

$$A \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるから、$\mathrm{rank}\,A=3$ である。

以上より、

$$\mathrm{rank}\,A = \begin{cases} 4 & (a \neq 1,3 \text{ のとき}) \\ 3 & (a = 1,3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

線形代数１・第 11 回 (2024 年 6 月 20 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数１・第 11 回学習内容チェックシート 2024 年 6 月 20 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 下の表を完成させなさい。第 1 行には階数の値を、第 2 行には対応する標準形を書き、第 3 行には次の 3 次正方行列たちを階数ごとにグループ分けした結果を書きなさい (どの行列がどのグループに属しているのかがわかるように、書き方を工夫すること)。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

階数	
標準形	
行列	

Q2. $(2,3)$-行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ にある列基本変形を行って行列 B が得られたとしよう。このとき、B は A にどのような基本行列 P を A に掛けたものに一致するか。A に施す列基本変形が次の表に掲げられている各場合に、A の左右どちらから P を掛けるかということともに、B と P を記入して、表を完成させなさい。

列基本変形	B	P	左 or 右
第 2 列の t 倍を第 3 列に加える			
第 1 列を t 倍する			
第 1 列と第 2 列を入れ替える			

Q3. 与えられた行列 A の標準形を求めるための手順を書きなさい。

Q4. 第 11 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。