§11. ベクトル空間の次元と基底

数ベクトル空間において定義された一次結合、一次独立、基底、次元などの諸概念は一般のベクトル空間に対しても定義される。ここでは、線形代数におけるこれらの主要概念を具体例を通して学ぶ。

● 11-1：一次結合

V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし、$v_1, \cdots, v_k \in V$ とする。ベクトル $v \in V$ が、

(11-1 a) $$v = t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k \qquad (t_1, \cdots, t_k \in \mathbb{R})$$

のように表わされるとき、v は "$v_1, \cdots, v_k$" の $\mathbb{R}$-**一次結合**あるいは $\mathbb{R}$-**線形結合**であるという。"$v_1, \cdots, v_k$" の $\mathbb{R}$-一次結合の全体を $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{v_1, \cdots, v_k\}$ と書く：

(11-1 b) $$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{v_1, \cdots, v_k\} = \{\ t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k \mid t_1, \cdots, t_k \in \mathbb{R}\ \}.$$

$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{v_1, \cdots, v_k\}$ は V の部分空間になる。これを "$v_1, \cdots, v_k$" によって**張られる部分空間**と呼ぶ。"$v_1, \cdots, v_k$" によって**生成される部分空間**と呼ばれることもある。

● 11-2：有限次元

$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V が**有限次元**であるとは、

(11-2 a) $$V = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{v_1, \cdots, v_k\}$$

となるような有限個のベクトル $v_1, \cdots, v_k \in V$ が存在するときをいう。有限次元ではないベクトル空間は**無限次元**であると呼ばれる。有限次元・無限次元という概念は数ベクトル空間にはなかった概念である。

例 11-2-1 (1) 零ベクトルだけからなるベクトル空間 $\{0\}$ は有限次元である。

(2) 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ は有限次元である。実際、$\mathbb{R}^n$ における n 個のベクトル

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \cdots, \mathbf{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考えると、$\mathbb{R}^n = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ となる。さらに、数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の任意の部分空間も、基底の存在定理 [定理 6-2-3] により、有限次元である。

(3) 実数係数の 1 変数多項式全体のなすベクトル空間 $\mathbb{R}[x]$ は無限次元である。

(**(3) の証明**)

もし、$\mathbb{R}[x]$ が有限次元であったとすると、$\mathbb{R}[x] = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{f_1(x), \cdots, f_k(x)\}$ となる多項式 $f_1(x), \cdots, f_k(x) \in \mathbb{R}[x]$ が存在する。$f_1(x), \cdots, f_k(x)$ の次数をそれぞれ $d_1, \cdots, d_k$ とおき、$d = d_1 + \cdots + d_k + 1$ とおくと、x^d は $f_1(x), \cdots, f_k(x)$ の一次結合では表わすことはできない。これは $\mathbb{R}[x] = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{f_1(x), \cdots, f_k(x)\}$ に矛盾する。 □

● 11-3：一次独立

$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V に属する k 個のベクトルの列 "$v_1, \cdots, v_k$" が $\mathbb{R}$ 上**一次独立**である (あるいは**線形独立**である) とは、次の条件が成り立つときをいう：$t_1,\ \cdots, t_k \in \mathbb{R}$ について

(11-3 a) $$t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k = 0_V \implies t_1 = \cdots = t_k = 0.$$

例 11 - 3 - 1 実数係数の 1 変数多項式全体のなすベクトル空間 $\mathbb{R}[x]$ において、"$1, x, x^2, \cdots, x^n$" は $\mathbb{R}$ 上一次独立である ($\because$ 多項式の (相等の) 定義による)。

例 11 - 3 - 2 $V = \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ のベクトル $v_1, v_2, v_3 \in V$ を

$$v_1(x) = x, \quad v_2(x) = \sin x, \quad v_3(x) = \sin 2x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義する。"v_1, v_2, v_3" は $\mathbb{R}$ 上一次独立である。

(**証明**)

$t_1v_1 + t_2v_2 + t_3v_3 = 0_V$ $(t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R})$ とおく。この $\mathbb{R}$ 上の関数としての等式に、$x \in \mathbb{R}$ を代入することにより、実数としての等式

$$t_1x + t_2 \sin x + t_3 \sin 2x = 0 \tag{11-3 b}$$

が導かれる。今、$x = \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$ を (11 - 3 b) に代入して、t_1, t_2, t_3 に関する連立一次方程式

$$\begin{cases} \pi t_1 = 0 \\ \frac{\pi}{2}t_1 + t_2 = 0 \\ \frac{\pi}{4}t_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}t_2 + t_3 = 0 \end{cases}$$

を得る。この解は $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ のみであるから、"v_1, v_2, v_3" は一次独立である。 $\square$

● 11 - 4 : 基底

V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする。V に属する n 個のベクトルの列 "$v_1, \cdots, v_n$" が V の**基底**であるとは、次の 2 つが成り立つときをいう :

(B1) $V = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{v_1, \cdots, v_n\}$.

(B2) "$v_1, \cdots, v_n$" は $\mathbb{R}$ 上一次独立である。

上の 2 つの条件は「任意の $v \in V$ が $v_1, \cdots, v_n$ の $\mathbb{R}$-一次結合によって一意的に表わされること」と同値である。

$V = \mathbb{R}^n$ (数ベクトル空間) やその部分空間の基底について、すでに沢山の例を知っているからそれ以外のベクトル空間について基底の例を挙げる。

例 11 - 4 - 1 (1) (m, n)-行列全体のなすベクトル空間 $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ において、$E_{ij} \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ を (i, j)-成分のみ 1 で、残りの成分はすべて 0 であるような行列とする。このとき、$\{E_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ は $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ の基底である。

(2) $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ の部分空間 $\mathrm{Sym}_3(\mathbb{R}) = \{\ A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^{\mathrm{T}} = A\ \}$ を考える。$1 \leq i < j \leq 3$ なる自然数 i, j に対して

$$S_{ij} := E_{ij} + E_{ji}$$

とおく。このとき、

$$E_{11}, E_{22}, E_{33}, S_{12}, S_{13}, S_{23}$$

は $\mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})$ の基底である。

一般に、$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = \{\ A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^{\mathrm{T}} = A\ \}$ は、$S_{ij} = E_{ij} + E_{ji}$ とおくとき、$\{E_{ii}\}_{i=1}^n \cup \{S_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n}$ を基底に持つことがわかる。 $\square$

定理 11 - 4 - 2

任意の有限次元ベクトル空間 V $(\neq \{0_V\})$ には基底が存在する。

(**証明**)

V は有限次元なので、$V = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{v_1, \cdots, v_k\}$ となる $v_1, \cdots, v_k \in V$ が存在する。[定理 9 - 3 - 1] の証明と同様にして、$v_1, \cdots, v_k$ の中で一次独立となる最大のベクトルの組が V の基底となることがわかる。 □

● 11 - 5 : 次元

$\mathbb{R}^n$ の部分空間に対して、基底を構成しているベクトルの個数は、基底に依らずに、一定であった。同様のことが有限次元ベクトル空間に対して成立する。

定理 11 - 5 - 1

V $(\neq \{0_V\})$ を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とする。このとき、V の基底を構成するベクトルの個数は、基底に依らずに、一定である。この個数を V の**次元**といい、$\dim_{\mathbb{R}} V$ または単に $\dim V$ という記号で表わす。零ベクトルだけからなるベクトル空間 $\{0_V\}$ については $\dim\{0_V\} = 0$ と約束する。

この定理の証明は第 13 節で与えられる。

例 11 - 5 - 2 (1) $\dim \mathbb{R}^n = n.$

(2) $\dim \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R}) = mn.$

(3) 実数係数の 1 変数多項式全体のなすベクトル空間 $\mathbb{R}[x]$ において、n 次以下の多項式の全体

$$\mathbb{R}[x]_n = \{\ a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\ \}$$

は $\mathbb{R}[x]$ の部分空間である。“$1, x, x^2, \cdots, x^n$” は $\mathbb{R}[x]_n$ の基底をなすので、$\dim \mathbb{R}[x]_n = n+1$ である。

(4) $\dim(\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})) = \sharp(\{E_{ii} \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{S_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}) = \frac{n(n+1)}{2}.$

例 11 - 5 - 3 $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ を定数とし、漸化式

$$a_{n+3} + c_1a_{n+2} + c_2a_{n+1} + c_3a_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{11 - 5 a}$$

を満たす実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体を $S(c_1, c_2, c_3; \mathbb{R})$ とおく。$S(c_1, c_2, c_3; \mathbb{R})$ はベクトル空間 $\mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ の部分空間であり、$\dim S(c_1, c_2, c_3; \mathbb{R}) = 3$ である。実際、数列 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を最初の 3 項がそれぞれ以下で与えられる $S(c_1, c_2, c_3; \mathbb{R})$ の元とする (第 4 項まで書く)：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &: 1, 0, 0, -c_3, \cdots \\ \boldsymbol{e}_2 &: 0, 1, 0, -c_2, \cdots \\ \boldsymbol{e}_3 &: 0, 0, 1, -c_1, \cdots \end{aligned}$$

このとき、“$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$” は $S(c_1, c_2, c_3; \mathbb{R})$ の基底になる。これを示す。

(B1) $S(c_1, c_2, c_3; \mathbb{R}) = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ であること：

任意の $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in S(c_1, c_2, c_3; \mathbb{R})$ は

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 \tag{11 - 5 b}$$

と表わされる。実際、$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$ とおくと、数列に対する和とスカラー倍の定義より、$b_1=a_1,\ b_2=a_2,\ b_3=a_3,\ b_4=-a_1c_3-a_2c_2-a_3c_1,\ \cdots$ となる。$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は漸化式 (11 - 5 a) を満たすから、$-a_1c_3-a_2c_2-a_3c_1=a_4$ である。故に、$b_4=a_4$ である。一般に、$b_n=a_n,\ b_{n+1}=a_{n+1},\ b_{n+2}=a_{n+2}$ であったとすると、$\{b_n\}_{n=1}^{\infty},\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は漸化式 (11 - 5 a) を満たすから、$b_{n+3}=a_{n+3}$ となることがわかる。よって、数学的帰納法により、すべての自然数 n について $b_n=a_n$ となることがわかる。故に、$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ となる。

(B2) “$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$” が $\mathbb{R}$ 上一次独立であること：

$$s\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2+u\boldsymbol{e}_3=\mathbf{0}\qquad(s,t,u\in\mathbb{R})$$

とおく。但し、$\mathbf{0}$ は $\mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ の零ベクトルを表わす。この等式は数列としての等式であるから、最初の 3 項を比較することにより、$s=0,\ t=0,\ u=0$ を得る。故に、“$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$” は一次独立である。 □

例 11 - 5 - 4 $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ を定数としたとき、微分方程式

(11 - 5 c) $$\frac{d^3f}{dx^3}+c_1\frac{d^2f}{dx^2}+c_2\frac{df}{dx}+c_3f=0$$

を満たす関数 $f=f(x)$ 全体からなる $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V を考える。常微分方程式論により、次の事実が知られている：任意の実数 α,β,γ に対して、微分方程式 (11 - 5 c) を満たす関数 $f=f(x)$ であって、$f(0)=\alpha,\ \frac{df}{dx}(0)=\beta,\ \frac{d^2f}{dx^2}(0)=\gamma$ を満たすものが一意的に存在する。

上の事実を既知とすると、$\dim V=3$ であることがわかる。実際、関数 f_0,f_1,f_2 を

$$\begin{aligned}f_0(0)&=1,\quad \tfrac{df_0}{dx}(0)=0,\quad \tfrac{d^2f_0}{dx^2}(0)=0\\ f_1(0)&=0,\quad \tfrac{df_1}{dx}(0)=1,\quad \tfrac{d^2f_1}{dx^2}(0)=0\\ f_2(0)&=0,\quad \tfrac{df_2}{dx}(0)=0,\quad \tfrac{d^2f_2}{dx^2}(0)=1\end{aligned}$$

を満たす V の元とする。“f_0,f_1,f_2” は V の基底であることがわかる。これを示す。

(B1) $V=\mathrm{Span}\{f_0,f_1,f_2\}$ であること：

任意に $f\in V$ をとる。$\alpha=f(0),\ \beta=\frac{df}{dx}(0),\ \gamma=\frac{d^2f}{dx^2}(0)$ とおく。関数 $g=\alpha f_0+\beta f_1+\gamma f_2\in V$ を考えると、$g(0)=\alpha=f(0),\ \frac{dg}{dx}(0)=\beta=\frac{df}{dx}(0),\ \frac{d^2g}{dx^2}(0)=\gamma=\frac{d^2f}{dx^2}(0)$ が成り立つ。微分方程式 (11 - 5 c) を満たす関数の一意性から、$g=f$ を得る。故に、任意の $f\in V$ は f_0,f_1,f_2 の $\mathbb{R}$-一次結合で表わされる。

(B2) “f_0,f_1,f_2” が $\mathbb{R}$ 上一次独立であること：

$\alpha f_0+\beta f_1+\gamma f_2=0_V\ (\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R})$ とおく。これは関数として等式であるから、任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して

(11 - 5 d) $$\alpha f_0(x)+\beta f_1(x)+\gamma f_2(x)=0$$

が成り立つ。今、(11 - 5 d) において $x=0$ を代入すると、$\alpha=0$ であることがわかる。また、(11 - 5 d) の両辺を微分してから、$x=0$ を代入すると、$\beta=0$ であることがわかる。最後に、(11 - 5 d) の両辺を 2 回微分してから、$x=0$ を代入すると、$\gamma=0$ であることがわかる。よって、“f_0,f_1,f_2” は $\mathbb{R}$ 上一次独立である。 □

No.11 2024 年 12 月 5 日

線形代数 2 事前練習用演習問題

pre11-1. (一次独立)

関数 $v_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3)$ を

$$v_0(x) = 1, \quad v_1(x) = e^x, \quad v_2(x) = e^{2x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義する。"v_0, v_1, v_2" は一次独立であることを示せ。

pre11-2. (部分空間とその基底)

漸化式 $5a_{n+2} - a_{n+1} - 3a_n = 0 \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たす実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の全体からなる集合を W とおく：

$$W = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{Seq}(\mathbb{R}) \mid 5a_{n+2} - a_{n+1} - 3a_n = 0 \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \ \}.$$

(1) W はベクトル空間 $\mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ の部分空間であることを示せ。

(2) W の次元とその一組の基底を求めよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

---

pre11-1.

$$(*) \qquad sv_0 + tv_1 + uv_2 = 0 \quad (s, t.u \in \mathbb{R})$$

とおく。ここで、右辺の 0 は $0(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$ によって定義される関数 $0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を表わす。$(*)$ の両辺に $x \in \mathbb{R}$ を代入することにより、実数に関する等式

$$(**) \qquad s + te^x + ue^{2x} = 0 \quad (s, t.u \in \mathbb{R})$$

を得る。$x = 0, 1, 2$ の値を代入することにより、s, t, u に関する連立一次方程式

$$\begin{cases} s + t + u = 0 \\ s + te + ue^2 = 0 \\ s + te^2 + ue^4 = 0 \end{cases}$$

を得る。この連立一次方程式の係数行列を A とおくと、計算により $\mathrm{rank}\, A = 3$ とわかるから、$s = t = u = 0$ を得る。よって、"v_0, v_1, v_2" は一次独立である。

pre11-2. (1) (SS0) ベクトル空間 $\mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ の零ベクトル $0_{\mathrm{Seq}(\mathbb{R})}$ は $0_{\mathrm{Seq}(\mathbb{R})} = \{0_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(0_n = 0 \ (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots))$ である。この数列は、漸化式

$$50_{n+2} - 0_{n+1} - 30_n = 5 \cdot 0 - 0 - 3 \cdot 0 = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすから、$0_{\mathrm{Seq}(\mathbb{R})} \in W$ である。

(SS1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in W$ を任意にとる。このとき、任意の n に対して、

$$5a_{n+2} - a_{n+1} - 3a_n = 0$$

$$5b_{n+2} - b_{n+1} - 3b_n = 0$$

である。左辺同士、右辺同士を足して、

$$5(a_{n+2} + b_{n+2}) - (a_{n+1} + b_{n+1}) - 3(a_n + b_n) = 0$$

を得る。したがって、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty} \in W$ である。

(SS2) も (SS1) と同様にして満たされることがわかるので、解答は略す。

以上より、W は $\mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ の部分空間である。

(2) 与えられた漸化式は

$$a_{n+2} = \frac{1}{5}a_{n+1} + \frac{3}{5}a_n$$

と書き換えられる。よって、a_3, a_4 は a_1, a_2 を用いて

$$a_3 = \frac{1}{5}a_2 + \frac{3}{5}a_1,$$
$$a_4 = \frac{16}{25}a_2 + \frac{3}{25}a_1$$

と表わされる。同様に考えて、任意の自然数 n に対して、a_n は a_1, a_2 を用いて表わされることがわかる。このことから、与えられた漸化式を満たす数列は、はじめの 2 項により決まることがわかる。そこで、次のように与えられる数列 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \in W$ を考える。

$$\boldsymbol{e}_1 := \text{“}1, 0, \frac{3}{5}, \cdots\cdots\text{”} \text{ (第 3 項以降は与えられた漸化式により帰納的に定義)}$$
$$\boldsymbol{e}_2 := \text{“}0, 1, \frac{1}{5}, \cdots\cdots\text{”} \text{ (第 3 項以降は与えられた漸化式により帰納的に定義)}$$

このとき、“$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$” は W の基底である。これを示す。

(B1) 任意の $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in W$ は “$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$” の一次結合として

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2$$

と表わされるから、“$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$” は W を張る。

(B2) $s\boldsymbol{e}_1 + t\boldsymbol{e}_2 = 0_{\mathrm{Seq}(\mathbb{R})}$ $(s, t \in \mathbb{R})$ とおく。この両辺のはじめの 2 項を比較することにより、$s = t = 0$ であることがわかる。したがって、“$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$” は一次独立である。

(B1), (B2) より、“$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$” は W の基底であり、したがって、$\dim W = 2$ である。

線形代数２・第 11 回 (2024 年 12 月 5 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数２・第 11 回学習内容チェックシート 2024 年 12 月 5 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間、$v_1, \cdots, v_k$ を V のベクトルとする。次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	定義
$v_1, \cdots, v_k$ の一次結合とは？	p.	
$v_1, \cdots, v_k$ によって張られる V の部分空間 $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{v_1, \cdots, v_k\}$ とは？	p.	
"$v_1, \cdots, v_k$" が一次独立であるとは？	p.	
"$v_1, \cdots, v_k$" が V の基底であるとは？	p.	
V の次元とは？	p.	

Q2. 次の表の左側の欄に与えられている各ベクトル空間 V に対して、その次元を中央の欄に、１組の基底を右側の欄に記入しなさい。

V	$\dim V$	１組の基底
$\mathbb{R}^3$		
$\mathrm{M}_{23}(\mathbb{R})$		
$\mathbb{R}[x]_4$		

Q3. 次の $\boxed{}$ に適当な言葉、数字、数式、記号等を入れなさい。

- V を漸化式 $a_{n+3} + 3a_{n+1} + 4a_n = 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たす実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の全体からなるベクトル空間とする。$\dim V = \boxed{}$ であり、V は次を基底に持つ：

$$\boxed{}$$

任意の $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in V$ は上の基底の一次結合により次のように表わされる。

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \boxed{}$$

Q4. 第 11 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。