§11. 対称行列の直交行列による対角化とその応用

対称行列は直交行列により対角化可能である。ここでは、この事実の確認とその応用を述べる。対称行列の標準形の理論は、2 次式で与えられる n 変数関数の最大・最小問題を解くときや、(少なくとも 2 回微分可能な) n 変数関数に対する極値問題を解くときに応用される。

● 11-1：対称行列の標準形

$A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ を対称行列とする。A を $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ の元とみすとエルミート行列であるから、その固有値はすべて実数である。したがって、[補題 8-4-1] と同じ証明方法により、次が示される。

補題 11-1-1

任意の実対称行列は直交行列によって上三角化可能である。

対称行列が上三角行列ならば対角行列であるから、[定理 8-2-3] と同様に、次が成り立つ。

定理 11-1-2

対称変換はある正規直交基底に関して対角行列として表わされる。すなわち、$A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ が対称行列ならば、A は直交行列により対角化される。

注意. A を対角行列に変換する直交行列 P は $|P| = 1$ を満たすようにとることができる。実際、P は直交行列なので、$|P| = \pm 1$ であるが、$|P| = -1$ のときには、P の第 1 列ベクトル $\mathbf{p}_1$ を $-\mathbf{p}_1$ に置き換えればよい。$|P| = 1$ を満たす直交行列 P は**回転行列**とも呼ばれる (理由は [定理 10-3-1] などを参照)。したがって、(実) 対称行列は回転行列により対角化可能である。

● 11-2：$\mathbb{R}^n$ 上の 2 次形式

対称行列の標準形の理論は 2 次式で与えられる n 変数関数の最大・最小問題に応用することができる。この問題を考えるために、$\mathbb{R}^n$ 上の 2 次形式を定義する。

定義 11-2-1

定数 $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq j \leq n)$ を用いて、

$$q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j \qquad (x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R})$$

によって定義される関数 $q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^n$ 上の **2 次形式** (quadratic form) と呼ぶ。

例 11-2-2 (1) 関数 $q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2 + 3xy + 4y^2 \qquad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\right)$$

によって定義する。q は 2 次形式である。

(2) 関数 $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \qquad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\right)$$

によって定義する。q は 2 次形式である。

2 次形式は対称行列を使って表現することができる。上の例 (1) の 2 次形式 q は、

$$x^2+3xy+4y^2=(x\ y)\begin{pmatrix} x+\frac{3}{2}y \\ \frac{3}{2}x+4y \end{pmatrix}=(x\ y)\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

より、$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}$ とおくと、$q(\mathbf{x})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}$ と書くことができる。同様に、例 (2) の 2 次形式 q は $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと、$q(\mathbf{x})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}$ と書くことができる。

一般に、2 次形式 q が [定義 11 - 2 - 1] のように与えられるとき、対称行列 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ を

$$A:=\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \cdots & \frac{a_{1n}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & \cdots & \frac{a_{2n}}{2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{a_{1n}}{2} & \frac{a_{2n}}{2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

と定めると、任意の $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ に対して $q(\mathbf{x})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}$ となる。このことから、関数 $q:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ に対して次の言い換えが成立する：

(11 - 2 a) $\qquad q$ が 2 次形式 $\iff$ $\begin{pmatrix} q(\mathbf{x})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}\ (\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n) \text{ を満たす} \\ \text{対称行列 } A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \text{ が存在する。} \end{pmatrix}$

定理 11 - 2 - 3
$A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ を対称行列とし、$q:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ を $q(\mathbf{x})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}$ ($\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$) により定義される 2 次形式とする。このとき、$\mathbb{R}^n$ の適当な正規直交基底 “$\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_n$” をとると、

$$q\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{p}_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2 \qquad (x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R})$$

となる。ここで、$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ は A の固有値である。

(証明)

[定理 11 - 1 - 2] より、

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ \mathrm{O} & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

を満たす直交行列 $P\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ と $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ が存在する。$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ は A の固有値である。P は直交行列であるから、$P=(\mathbf{p}_1\ \cdots\ \mathbf{p}_n)$ と表わすと “$\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_n$” は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底となり、$P^{-1}=P^{\mathrm{T}}$ を満たす。よって、任意の $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ に対して次が成立する：

$$q\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{p}_i\Big)=q(P\mathbf{x})=(P\mathbf{x})^{\mathrm{T}}A(P\mathbf{x})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}AP)\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2. \qquad \square$$

例 11 - 2 - 4 [例 11 - 2 - 2(2)] の 2 次形式 q を考える。この 2 次形式 q は、$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと、$q(\mathbf{x})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}$ の形で表わされる。$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ を A の固有値としたとき、

$$q(x\mathbf{p}_1+y\mathbf{p}_2+z\mathbf{p}_3)=\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2 \qquad (x,y,z\in\mathbb{R})$$

を満たす $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 “$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$” を見つけよう。

まず、固有多項式 $\Delta_A(x) = |xE_3 - A|$ を計算する。$\Delta_A(x) = (x+1)(x-2)^2$ となるから、A の固有値は $-1, 2$ である。各固有値に属する $\mathbb{R}^3$ における固有空間は次で与えられる：

$$W(-1, T_A) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}, \quad W(2, T_A) = \left\{ s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

$W(-1, T_A), W(2, T_A)$ からそれぞれ基底 “$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$”, “$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$” を選ぶ。“$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$” は $\mathbb{R}^3$ の 1 組の基底をなす。この基底にグラム-シュミットの直交化法を適用すると、A の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底

$$\text{“}\mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\text{”}$$

が得られる。この正規直交基底を用いると q は次の形で表わされる：

$$q(x\mathbf{p}_1 + y\mathbf{p}_2 + z\mathbf{p}_3) = -x^2 + 2y^2 + 2z^2 \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

□

● 11 - 3 : 2 次形式の最大値・最小値

$A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ を対称行列とする。零でないベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

(11 - 3 a)
$$R(A; \mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}$$

を**レイリー (Rayleigh) 商**という。$\langle \ , \ \rangle$ を $\mathbb{R}^n$ の通常の内積 (ユークリッド内積) とすると、レイリー商は次のように書くこともできる：

$$R(A; \mathbf{x}) = \frac{\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

定理 11 - 3 - 1

$A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ を対称行列とする。A の最大固有値と最小固有値をそれぞれ $\lambda_{\max}(A)$, $\lambda_{\min}(A)$ とおき、$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) と A に関するレイリー商を $R(A; \mathbf{x})$ とする。次が成り立つ。

(1) 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) に対して、

(11 - 3 b)
$$\lambda_{\min}(A) \leq R(A; \mathbf{x}) \leq \lambda_{\max}(A).$$

(2) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ について、

(i) $A\mathbf{x} = \lambda_{\max}(A)\mathbf{x} \iff \lambda_{\max}(A) = R(A; \mathbf{x})$.

(ii) $A\mathbf{x} = \lambda_{\min}(A)\mathbf{x} \iff \lambda_{\min}(A) = R(A; \mathbf{x})$.

(**証明**)

(1) $R(A; \mathbf{x})$ は次の性質を持つ。

- $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ が直交行列ならば、$R(P^{-1}AP; P^{-1}\mathbf{x}) = R(A; \mathbf{x})$.
- $R(A; \mathbf{x}) = R(A; \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|})$.

$\because$)

$P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ が直交行列ならば、

$$R(P^{-1}AP; P^{-1}\mathbf{x}) = \frac{\langle (P^{-1}AP)(P^{-1}\mathbf{x}), P^{-1}\mathbf{x} \rangle}{\langle P^{-1}\mathbf{x}, P^{-1}\mathbf{x} \rangle} = \frac{\langle P^{-1}A\mathbf{x}, P^{-1}\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \frac{\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = R(A; \mathbf{x})$$

である。$R(A; \mathbf{x}) = R(A; \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|})$ はすぐにわかる。 □

上の 2 つから、$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ に対して不等式 (11 - 3 b) が成り立つことを示すには、$\|\mathbf{x}\| = 1$ を満たす $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\lambda_{\min}(A) \leq R(P^{-1}AP; \mathbf{x}) \leq \lambda_{\max}(A)$ となることを示せばよい。

さて、A は対称行列であるから、ある直交行列 $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ により

(11 - 3 c) $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \text{O} \\ & \ddots & \\ \text{O} & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (\lambda_1, \cdots, \lambda_n \text{ は } A \text{ の固有値})$$

となる。よって、$\|\mathbf{x}\| = 1$ を満たす $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$R(P^{-1}AP; \mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

が成り立つ。$\lambda_{\min}(A) \leq \lambda_i \leq \lambda_{\max}(A)$ $(i = 1, \cdots, n)$ であることと $\|\mathbf{x}\| = 1$ であることから、$\lambda_{\min}(A) \leq R(P^{-1}AP; \mathbf{x}) \leq \lambda_{\max}(A)$ が得られる。

(2)「$\Longrightarrow$」は容易にわかる。「$\Longleftarrow$」を示す。(11 - 3 c) を満たす直交行列 P をとり、$P = (\mathbf{p}_1 \ \cdots \ \mathbf{p}_n)$ とおく。“$\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n$” は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底である。$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ を $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{p}_i$ $(x_i \in \mathbb{R})$ と書く。$\|\mathbf{x}\| = 1$ のとき、次式が成り立つ：

$$R(A; \mathbf{x}) = \langle A \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{p}_i, \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{p}_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$$

(i) $i = 1, \cdots, n$ に対して $\lambda_i \leq \lambda_{\max}(A)$ であるから、$R(A; \mathbf{x}) = \lambda_{\max}(A)$ が成り立つのは、すべての i に対して $\lambda_i x_i^2 = \lambda_{\max}(A) x_i^2$ となるときに限る。したがって、$\lambda_i \neq \lambda_{\max}(A)$ ならば $x_i^2 = 0$ でなければならない。故に、$R(A; \mathbf{x}) = \lambda_{\max}(A)$ が成り立つような $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ は、$\lambda_i = \lambda_{\max}(A)$ となる i に渡る $\mathbf{p}_i$ たちの一次結合で表わされる。よって、$\mathbf{x}$ は固有値 $\lambda_{\max}(A)$ に属する固有ベクトルである。

(ii) も (i) と同様に示される。 □

例 11 - 3 - 2 $\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$ 上で定義された関数

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \frac{2xy + 4yz + 4zx}{x^2 + y^2 + 4z^2} \qquad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}\right)$$

の最大値と最小値を求めよう。

$X = x,\ Y = y,\ z = \frac{Z}{2}$ と変数変換を行い、関数 $g : \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$g\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \frac{2XY + 4Y(\frac{Z}{2}) + 4(\frac{Z}{2})X}{X^2 + Y^2 + 4(\frac{Z}{2})^2} = \frac{2XY + 2YZ + 2ZX}{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

により定義する。g の最大値と最小値を求めればよい。

$$2XY + 2YZ + 2ZX = (X \ Y \ Z) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

と書けるから、g の最大値と最小値を求めるには、[定理 11 - 3 - 1] により、対称行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の最大固有値と最小固有値を求めればよい。A の固有多項式 $\Delta_A(x) = |xE_3 - A|$ は $\Delta_A(x) = (x-2)(x+1)^2$ のように因数分解されるから、A の最大固有値は 2 で、最小固有値は -1 である。よって、f の最大値は 2, 最小値は -1 である。 □

線形代数 3 事前練習用演習問題

pre11-1. 2 次形式 $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy - 6xz + 12yz \qquad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\right)$$

によって定義する。

(1) すべての $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x}$ を満たす対称行列 A を求めよ。

(2) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を (1) で求めた対称行列 A の固有値とする。すべての $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ に対して

$$q(x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + x_3\mathbf{p}_3) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2$$

を満たす $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 “$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$” を一組求めよ。

(3) 関数 q の $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$ における最大値と最小値を求めよ。

注意. S 上で $q(\mathbf{x})$ はレイリー商 $R(A; \mathbf{x})$ に一致するから、[定理 11 - 3 - 1(1)] より、$\mathbf{x} \in S$ に対して $\lambda_{\min}(A) \leq q(\mathbf{x}) \leq \lambda_{\max}(A)$ である。[定理 11 - 3 - 1(2)] より、固有値 $\lambda_{\min}(A), \lambda_{\max}(A)$ に属する固有ベクトルの中から大きさ 1 のものを選ぶことにより、$q(\mathbf{x})$ は S 上で $\lambda_{\min}(A)$ と $\lambda_{\max}(A)$ の値を取り得ることがわかる。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre11-1. (3) は [例 11 - 3 - 2] と同じ方法で求めることができる。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ とおくと、これは条件を満たす対称行列である。

(2) $\Delta_A(x) = x^2(x - 14)$ より、A の固有値は $0, 14$ である。それぞれの固有値に属する固有空間を求めると、次のようになる。

$$W(0, T_A) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\},\ W(14, T_A) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

とおくと、“$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$” は $\mathbb{R}^3$ の基底をなす。この基底にグラム-シュミットの直交化法を適用して A の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底

$$\text{“}\mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix},\ \mathbf{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\text{”}$$

を得る。この正規直交基底を用いると、

$$q(x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + x_3\mathbf{p}_3) = 14x_3^2$$

となる。

(3) (2) より、関数 $q(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in S$) の最大値、最小値は、それぞれ $14, 0$ である。(一般の場合は、上の注意に従えば求められる。)

第 11 回 (2025 年 6 月 23 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数３・第 11 回学習内容チェックシート 2025 年 6 月 23 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 実対称行列の対角化に関する定理を述べよ。

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q2. (1) $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ が回転行列であるとはどんな条件が満たされるときをいうか。

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(2) 対角行列でない 2 次回転行列と 3 次回転行列の例をそれぞれ 1 つずつ与えよ。

[2 次回転行列の例] [3 次回転行列の例]

＿＿＿＿＿＿＿＿ ＿＿＿＿＿＿＿＿

Q3. (1) 関数 $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ が 2 次形式であるとは、$q(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix})$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$ がどのような形の式で与えられるときをいうか。その一般形を書け。

$q(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(2) 上で書いた式は、$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと、適当な 3 次対称行列 A を用いて $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x}$ の形に書き換えることができる。その A はどのように与えられるか。成分で記せ。

$A =$

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q4. q を n 次実対称行列 A により $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x}$ $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$ の形で与えられる 2 次形式とする。$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 “$\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n$” をうまく選ぶと、$q(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{p}_i)$ $(x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R})$ はどのような単純な形にすることができるか？

$q(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{p}_i) =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q5. $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ を対称行列とし、$R(A; \mathbf{x})$ を $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ と A に関するレイリー商とする。

(1) $R(A; \mathbf{x})$ の定義を書け。$R(A; \mathbf{x}) =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の場合に具体的に書け。$R(A; \mathbf{x}) =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

(3) $\mathbf{x}$ が $\mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ 内を動くとき、$R(A; \mathbf{x})$ が取り得る値の範囲を書け。

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(4) $R(A; \mathbf{x})$ $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\})$ が最大・最小になるときの $\mathbf{x}$ はどんなベクトルか？

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q6. 第 11 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。