§11. 有界閉集合上での重積分

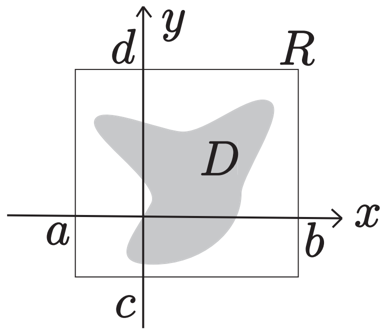
この節では、必ずしも長方形でない有界閉集合上での重積分を定義する。後半では、特に、x-軸 に平行な 2 直線と 2 つの 1 変数関数 $y = h(x),\ y = k(x)$ のグラフで囲まれた閉領域 (これを縦線領域と呼ぶ) 上での重積分を考え、その値を 1 変数関数の定積分を 2 回行うこと (累次積分) により求める方法を説明する。また、面積の定義を与える。

● 11 - 1 : 有界閉集合

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が**有界**であるとは、D を含む長方形領域 $R = [a, b] \times [c, d]$ が存在するときをいう。

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が**閉集合**であるとは、D 内の点列 $\{\mathrm{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するときはいつでも、その極限 $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_n$ が D の中にあるときをいう。

$\mathbb{R}^2$ の有界な閉集合を**有界閉集合**という。



例 11 - 1 - 1

(1) $D_1 = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\ \}$ は有界でも閉集合でもない。

(2) $D_2 = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq |x|\ \}$ は有界でないが閉集合である。

(3) $D_3 = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\ \}$ は有界閉集合である。

(4) $D_4 = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\ \}$ は有界だが閉集合ではない。

● 11 - 2 : 有界集合上で定義された関数の重積分

D を $\mathbb{R}^2$ の有界な部分集合とし、$f(x, y)$ を D 上で定義された関数とする。このとき、D の外側では 0 と定義することにより、関数 $f(x, y)$ の定義域を $\mathbb{R}^2$ 全体に広げることができる：

(11 - 2 a)
$$f_0(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & ((x, y) \in D \text{ のとき}) \\ 0 & ((x, y) \notin D \text{ のとき}) \end{cases}$$

例 11 - 2 - 1 $D = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\ \}$ 上の関数 $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ に対して、

$$f_0(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2} & (x^2 + y^2 \leq 1 \text{ のとき}), \\ 0 & (x^2 + y^2 > 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

定理 11 - 2 - 2

D を $\mathbb{R}^2$ の有界な部分集合とし、$f(x, y)$ を D 上で定義された関数とする。(11 - 2 a) のように定義される $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f_0(x, y)$ が D を含むある長方形領域 R_0 上で積分可能ならば、D を含む任意の長方形領域 R 上で積分可能であり、

(11 - 2 b)
$$\int_R f_0(x, y)\, dxdy = \int_{R_0} f_0(x, y)\, dxdy$$

が成り立つ。

そこで、 $f_0(x, y)$ が D を含むある長方形領域 R_0 上で積分可能なとき、$f(x, y)$ は D 上で**積分可能**であるといい、(11 - 2 b) の値を

(11 - 2 c)
$$\int_D f(x, y)\, dxdy$$

によって表わす。これを $f(x, y)$ の D における**重積分**という。

● 11 - 3： 縦線領域・横線領域

閉区間 $[a,b]$ 上で定義された連続な関数 $h_1(x), k_1(x)$ が、すべての $x \in [a,b]$ に対して、$h_1(x) \leq k_1(x)$ を満たすとき、曲線 $y = h_1(x),\ y = k_1(x)$ および直線 $x = a,\ x = b$ で囲まれた閉領域

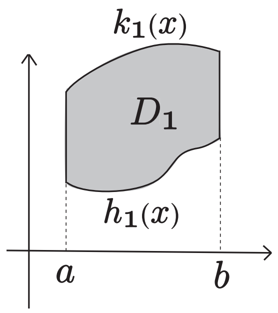
(11 - 3 a) $$D_1 = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ h_1(x) \leq y \leq k_1(x)\ \}.$$

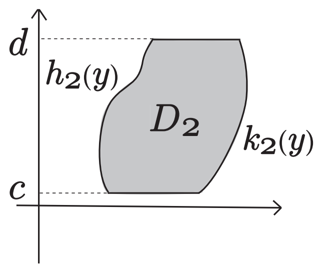
が定義される。このような $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合を**縦線領域**と呼ぶ。

同様に、閉区間 $[c,d]$ 上で定義された連続な関数 $h_2(y), k_2(y)$ が、すべての $y \in [c,d]$ に対して、$h_2(y) \leq k_2(y)$ を満たすとき、曲線 $x = h_2(y),\ x = k_2(y)$ および直線 $y = c,\ y = d$ で囲まれた閉領域

(11 - 3 b) $$D_2 = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ h_2(y) \leq x \leq k_2(y)\ \}.$$

が定義される。このような $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合を**横線領域**と呼ぶ。





● 11 - 4： 累次積分による重積分の計算

[定理 10 - 6 - 1] と同様に次が成り立つ。

定理 11 - 4 - 1

(1) D_1 を (11 - 3 a) のような縦線領域とし、$f(x,y)$ を D_1 上で定義された連続関数とする。このとき、$f(x,y)$ は D_1 上で積分可能であり、

(11 - 4 a) $$\int_{D_1} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \Big(\int_{h_1(x)}^{k_1(x)} f(x,y)dy \Big) dx.$$

(2) D_2 を (11 - 3 b) のような横線領域とし、$f(x,y)$ を D_2 上で定義された連続関数とする。このとき、$f(x,y)$ は D_2 上で積分可能であり、

(11 - 4 b) $$\int_{D_2} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \Big(\int_{h_2(y)}^{k_2(y)} f(x,y)dx \Big) dy.$$

例 11 - 4 - 2 $D = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq x\ \}$ は縦線領域であり、$f(x,y) = \cos(x+y)$ は D 上で連続であるから、

$$\int_D \cos(x+y)\,dxdy = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^x \cos(x+y)\,dy \Big) dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \Big[\sin(x+y) \Big]_0^x dx = \cdots = -\frac{1}{4}.$$

● 11 - 5：有界集合の面積

D を $\mathbb{R}^2$ の有界な部分集合とする。このとき、D 上で 1 の値をとり、それ以外では 0 の値をとる $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $\chi_D(x,y)$ が考えられる：

(11 - 5 a)
$$\chi_D(x,y) = \begin{cases} 1 & ((x,y) \in D \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y) \notin D \text{ のとき}) \end{cases}$$

関数 $\chi_D(x,y)$ を D の**特性関数**という。D の特性関数 $\chi_D(x,y)$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ が D で積分可能なとき、D は**面積確定**であるといい、その積分値を $\mu(D)$ で表わし、D の**面積**という：

(11 - 5 b)
$$\mu(D) = \int_D \chi_D(x,y)\,dxdy.$$

例 11 - 5 - 1　(11 - 3 a) で与えられる縦線領域 D_1 および (11 - 3 b) で与えられる横線領域 D_2 はいずれも面積確定であり、その面積は次で与えられる：

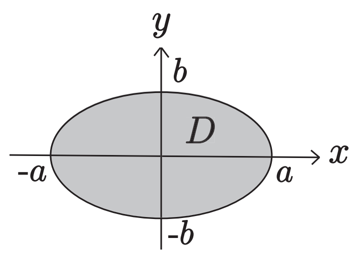
(11 - 5 c)
$$\mu(D_1) = \int_a^b \big(k_1(x) - h_1(x)\big)dx,$$

(11 - 5 d)
$$\mu(D_2) = \int_c^d \big(k_2(y) - h_2(y)\big)dy.$$

例 11 - 5 - 2　$a, b > 0$ を定数とする。有界閉集合

(11 - 5 e)
$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1 \right\}$$

は面積確定であり、その面積は $ab\pi$ である。



実際、閉区間 $[-a,a]$ 上で定義された関数 $h(x)$ を

$$h(x) = b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

によって定義すると、D は、

$$D = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -a \leq x \leq a,\ -h(x) \leq y \leq h(x) \,\}$$

のように表わされるから、縦線領域である。したがって、面積確定である。その面積 $\mu(D)$ は

$$\mu(D) = \int_{-a}^a \big(h(x) - (-h(x))\big)dx = 2\int_{-a}^a h(x)\,dx = 2b\int_{-a}^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx$$
$$= 2ab\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,dt \quad \left(t = \frac{x}{a} \text{ とおいて置換積分を行った}\right)$$

により与えられる。この積分を $t = \cos\theta$ とおいて置換積分で計算することにより、$\mu(D) = ab\pi$ とわかる。 □

● 11 - 6：面積確定集合と重積分可能性

次の定理が知られている。

定理 11 - 6 - 1

面積確定な有界閉集合 D 上で定義された連続関数は D 上で積分可能である。

● 11 - 7 : 重積分の性質

[定理 10 - 7 - 1] と同様に次が成り立つ。

定理 11 - 7 - 1

$f(x,y), g(x,y)$ を面積確定な有界閉集合 D 上で定義された連続関数とする。このとき、

(1) (**線形性**)

(i) $\displaystyle\int_D \big(f(x,y)+g(x,y)\big)dxdy = \int_D f(x,y)dxdy + \int_D g(x,y)dxdy.$

(ii) 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して、$\displaystyle\int_D \alpha f(x,y)dxdy = \alpha\int_D f(x,y)dxdy.$

(2) (**単調性**) 任意の $(x,y) \in R$ に対して $f(x,y) \leq g(x,y)$ ならば、

(11 - 7 a)
$$\int_D f(x,y)dxdy \leq \int_D g(x,y)dxdy.$$

(3) (**加法性**) D が 2 つの面積確定な有界閉集合 D_1, D_2 の和集合であって、かつ、D_1, D_2 の共通部分の面積が 0 ならば

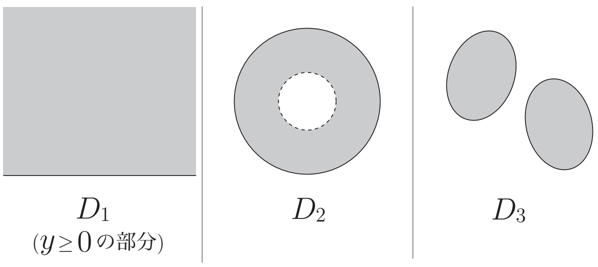
(11 - 7 b)
$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_{D_1} f(x,y)dxdy + \int_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

2025 年 12 月 3 日

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎２）第 11 回・学習内容チェックシート

学 籍 番 号 ____________________ 氏 名 ______________________________

Q1. 下図に描かれた、$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D_1, D_2, D_3 のそれぞれについて、有界かどうか、閉集合かどうか、有界閉集合かどうかを判断しなさい。但し、実践上の点は含まれ、破線上の点は含まれないとします。



解答は下の表に○×で記入しなさい。

	D_1	D_2	D_3
有界			
閉集合			
有界閉集合			

Q2. D を $\mathbb{R}^2$ の有界な部分集合とします。次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
D 上で定義された関数 $f(x,y)$ が重積分可能であるとき、その重積分 $\displaystyle\int_D f(x,y)dxdy$ とは？	p.	
D の面積 $\mu(D)$ とは?	p.	

Q3. D を $D = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ h(x) \leq y \leq k(x)\ \}$ によって定められた縦線領域とするとき、次の表を完成させなさい。

	解決方法・方針
縦線領域 D 上で定義された連続関数 $f(x,y)$ の重積分を計算するには？	
縦線領域 D の面積を計算するには？	

Q4. 第 11 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。