§12. 微分の計算方法

この節では、高校の数学 III で学ぶ微分の計算方法を復習する。

● 12 - 1 : 実数値関数の表記法

関数は写像の別名でもあるので、その表記法は第 5 節で学んだ本来写像の表記法に従うべきである。しかしながら、微分や積分を行う場合、「変数」をはっきりさせないと逆に混乱が生じる場合がある。そこで、この節から 3 回分については、実数値関数を表わすときには、「開区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ 」あるいは「関数 $f(x)$ $(x \in I)$」のように表わすことにする。これらは、厳密な写像の表現形式に従うと、「関数 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$」となる。

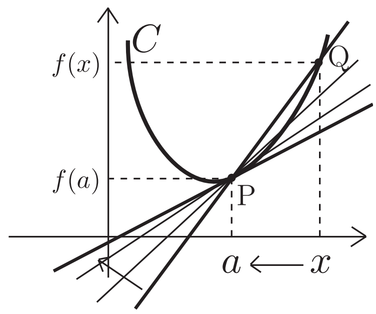
● 12 - 2 : 関数が微分可能とは

開区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ が点 $a \in I$ で**微分可能**であるとは、極限

(12 - 2 a)
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

が存在するときをいう。その値を $f(x)$ の a における**微分係数**といい、$f'(a)$ や $\frac{df}{dx}(a)$ などと表わす。すべての $a \in I$ で $f(x)$ が微分可能なとき、$f(x)$ は**微分可能**であるといい、各 $a \in I$ に対して微分係数 $f'(a)$ を対応させる関数を $f(x)$ の**導関数**という。

微分係数 $f'(a)$ は以下のような幾何学的な意味を持つ。a に十分近い点 $x \in I$ を任意にとると、平面上の点 $\mathrm{P}(a, f(a))$ と点 $\mathrm{Q}(x, f(x))$ を結ぶ直線の傾きは $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ により与えられる。ここで、x を a に「限りなく近づけて」いくと、Q は P に「限りなく近づいて」いき、P と Q を結ぶ直線は点 P で曲線 $C(x) = (x, f(x))$ に接する直線、すなわち、P における C の接線に「限りなく近づいて」いく。このような考察から、f の a における微分係数は、この接線の傾きを表わしていると考えられる。



例 12 - 2 - 1 (1) $a, b \in \mathbb{R}$ とする。関数 $f(x) = a + bx$ $(x \in \mathbb{R})$ は微分可能で、その導関数は

$$f'(x) = b$$

で与えられる。

(2) $f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ は点 0 で微分可能でない。

解;

(1) 任意の $c \in \mathbb{R}$ において $f(x)$ が微分可能であることを示す。$x \neq c$ であるような任意の実数 x に対して

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{(a + bx) - (a + bc)}{x - c} = b \quad \longrightarrow \quad b \ \ (x \to c)$$

であるから、$f(x)$ は c において微分可能で、$f'(c) = b$ である。

(2) 0 に収束する 2 つの数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ を考える。このとき、

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{f(y_n) - f(0)}{y_n - 0} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = -1$$

となって、極限が 1 つに定まらないので、$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ は存在しない。よって、$f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ は点 0 で微分可能でない。 □

● 12 - 3 : 関数の和差積商と微分可能性

開区間 I 上で定義された 2 つの関数 $f(x),\ g(x)$ が $a \in I$ で微分可能ならば、4 つの関数

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad (f-g)(x)=f(x)-g(x),\quad (fg)(x)=f(x)g(x),\quad \frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

はすべて a で微分可能であり、微分係数は次で与えられる：

- $(f \pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$ (複号同順),
- $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$ (**ライプニッツの公式**)
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a)=\dfrac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$

但し、4 番目の商については、すべての $x \in I$ について $g(x) \neq 0$ かつ $g'(a) \neq 0$ であるときのみ考えることができる。このうち、積の微分公式は次のように導かれる (その他の公式も同様に導かれる)。

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a}&=\frac{(f(x)-f(a))g(a)+f(x)(g(x)-g(a))}{x-a}\\&=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a)+f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\&\longrightarrow\ f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\qquad (x\to a)\end{aligned}$$

※最後の行で、「$f(x)$ は a で微分可能なので連続」という事実を使った。

例 12 - 3 - 1 (1) $\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f_2(x)=x^2$ は微分可能な関数 $f_1(x)=x$ を 2 つ掛けたものであるから微分可能であり、

$$(x^2)'=(x\cdot x)'=(x)'\cdot x+x\cdot (x)'=1\cdot x+x\cdot 1=2x$$

となる。同様にして、n を自然数として $\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f_n(x)=x^n$ は微分可能であり、導関数は次のようになることが帰納法によりわかる：

$$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

(2) n を自然数として関数 $g_n(x)=\dfrac{1}{x^n}\ (x\neq 0)$ は定数関数 $\underline{1}$ と $f_1(x)=x^n\ (x\neq 0)$ との商の形をしているから微分可能であり、その導関数は商の微分公式と (1) より、$\left(\dfrac{1}{x^n}\right)'=-\dfrac{n}{x^{n+1}}=-nx^{-n-1}$ となる。

● 12 - 4 : 合成関数と微分

定理 12 - 4 - 1

開区間 I_1 上で定義された関数 $f(x)$ と開区間 I_2 上で定義された関数 $g(y)$ は合成可能であるとする。$f(x)$ が点 $a \in I_1$ で微分可能で、$g(y)$ が点 $f(a)$ で微分可能ならば、合成関数 $(g\circ f)(x)$ は点 a で微分可能である。さらに、微分係数は次で与えられる：

(12 - 4 a) $$(g\circ f)'(a)=g'(f(a))\cdot f'(a).$$

(**証明**)

$b=f(a)$ とおき、

$$\frac{g(y)-g(b)}{y-b}=g'(b)+\varepsilon(y)\qquad (y\in I_2,\ y\neq b)$$

とおく。微分係数の定義により、$\lim_{y\to b}\varepsilon(y)=0$ である。任意の $x\in I_1\ (x\neq a)$ に対して、

(12 - 4 b) $$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}=(g'(f(a))+\varepsilon(f(x)))\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

となる。ここで、関数 $f(x)$ は a で微分可能、したがって、連続なので、$x \to a$ のとき $\varepsilon(f(x)) \to 0$ となる。故に、$x \to a$ のときの (12 - 4 b) の極限は存在し、

$$\lim_{x\to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = (g'(f(a)) + 0) \cdot f'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

となる。 □

例 12 - 4 - 2 関数 $h(x) = (x^2 - 3x + 1)^5$ $(x \in \mathbb{R})$ は、関数 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ $(x \in \mathbb{R})$ と関数 $g(y) = y^5$ $(y \in \mathbb{R})$ の合成関数で表わされる。2 つの関数 $f(x)$ と $g(y)$ は微分可能であるから、合成関数 $h(x) = (g \circ f)(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ も微分可能であり、導関数は次で与えられる。

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 5(x^2 - 3x + 1)^4 \cdot (2x - 3).$$

● **12 - 5 : 三角関数と指数関数の微分可能性**

結果だけ紹介する。

定理 12 - 5 - 1

(1) 正弦関数 $\sin x$ $(x \in \mathbb{R})$, 余弦関数 $\cos x$ $(x \in \mathbb{R})$ は微分可能であり、それらの導関数は

(12 - 5 a) $$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(2) 指数関数 $\exp(x) = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ は微分可能で、その導関数は $(e^x)' = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ である。

注意. $\tan x$ $(x \in \mathbb{R} - \{\ \frac{2k+1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\ \})$ は微分可能な関数の商として微分可能であり、導関数は次で与えられる：

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

定理 12 - 5 - 2 (**逆関数定理**)

$f(x)$ を開区間 I 上で定義された微分可能な関数であるとし、すべての点 $a \in I$ において $f'(a) > 0$ (または $f'(a) < 0$) であると仮定する。このとき、$f(x)$ $(x \in I)$ の値域 J は開区間であり、逆関数 $f^{-1}(y)$ $(y \in J)$ が定義される。さらに、この逆関数は微分可能であって、点 $b = f(a)$ における微分係数は次式で与えられる：

(12 - 5 b) $$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

逆関数の微分公式 (12 - 5 b) を導こう。逆関数の定義により、

$$y = (f \circ f^{-1})(y) \qquad (y \in J)$$

が成り立つ。この両辺を y で微分すると、合成関数の微分公式により、$1 = f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1}(y))'$ となるから、

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

である。この式に $y = b$ を代入すれば、$f^{-1}(b) = a$ より、(12 - 5 b) となる。

例 12 - 5 - 3 正弦関数 $\sin x$ は定義域を閉区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ に制限すると、狭義単調増加な連続関数である。よって、関数 $\sin x$ $(x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ は狭義単調増加で連続な逆関数を持つ。その逆関数を Sin^{-1} または arcsin と表わし、**逆正弦関数**と呼ぶ。Sin^{-1}, arcsin は「アーク・サイン」と読む。開区間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ の中の任意の実数 a において、$\sin'(a) = \cos a > 0$ であるから、逆関数定理

により、関数 $\mathrm{Sin}^{-1}(y)$ $(y \in (-1,1))$ は微分可能である。さらに、その導関数は、$x = \mathrm{Sin}^{-1}(y)$ とおくことにより、

$$(\mathrm{Sin}^{-1}(y))' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad (y \in (-1,1)) \tag{12-5 c}$$

により与えられることがわかる。

同様にして、$\cos x$ $(x \in [0,\pi])$ は逆関数 $\mathrm{Cos}^{-1}(y)$ $(y \in [-1,1])$ を持ち、$[-1,1]$ において連続、$(-1,1)$ において微分可能で、

$$(\mathrm{Cos}^{-1}(y))' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad (y \in (-1,1)) \tag{12-5 d}$$

となる。$\mathrm{Cos}^{-1}(y)$ $(y \in [-1,1])$ を**逆余弦関数**と呼ぶ。Cos^{-1} は「アーク・コサイン」と読む。Cos^{-1} を arccos と表わすこともある。 □

● 12 - 6 : 対数関数

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $(e^x)' = e^x > 0$ より、指数関数 $\exp x = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ は微分可能な逆関数を持つ。その逆関数を $\log x$ と書き、**対数関数**という。

どんなに大きな正の実数 a に対しても、$a < (2^n <) e^n$ となる自然数 n が存在するので、中間値の定理より指数関数 e^x $(x \in \mathbb{R})$ の値域、すなわち、$\log x$ の定義域は $(0,+\infty)$ である。

$x > 0$ に対して、逆関数の定義により、

$$y = \log x \iff e^y = x \tag{12-6 a}$$

という関係がある。したがって、

$$e^{\log x} = x \qquad (x > 0) \tag{12-6 b}$$

が成り立つ。指数法則から、

$$\log(xy) = \log x + \log y \quad (x, y > 0) \tag{12-6 c}$$

が成立することがわかる ($\because$ $e^{\log(xy)} = xy = e^{\log x} e^{\log y} = e^{\log x + \log y}$). また、(12 - 6 b) の両辺を x で微分して、

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \qquad (x > 0) \tag{12-6 d}$$

を得る。

● 12 - 7 : 冪関数

$\alpha \in \mathbb{R}$ を固定して、次の関数 $g(x)$ を考える：

$$g(x) = x^\alpha \qquad (x > 0). \tag{12-7 a}$$

この関数を**冪関数**という。冪関数は、$\alpha > 0$ のとき狭義単調増加関数、$\alpha < 0$ のとき狭義単調減少関数になる。また、合成関数の微分公式により、冪関数は微分可能であり、その導関数は、

$$(x^\alpha)' = \big(\exp(\alpha \log x)\big)' = \exp(\alpha \log x) \cdot (\alpha \log x)' = x^\alpha \cdot \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x > 0) \tag{12-7 b}$$

によって与えられる。この公式から、例えば、

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

が導かれる。