§12. 数列の極限と実数の連続性

実数には、四則演算に関する性質と大小関係に関する性質の他に、**連続性**と呼ばれる性質がある。連続性はアルキメデスの公理とカントールの公理の 2 つからなる[*]。ここでは、連続性の公理を理解し、数列の極限に関するいくつかの基本的事実が導出されることを学ぶ。

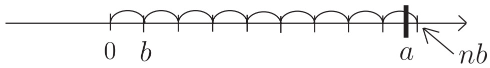
● 12 - 1 : アルキメデスの公理

次の命題がアルキメデスの公理である。

アルキメデスの公理

2 つの正の実数 a, b に対して、$a < nb$ となる自然数 n が存在する。

アルキメデスの公理において a, b が有理数の場合には定理である。実際、有理数 $a = \frac{l}{m}$, $b = \frac{p}{q}$ $(l, m, p, q \in \mathbb{N})$ に対して $n = 2lq \in \mathbb{N}$ をとれば $a < nb$ が満たされる。また、アルキメデスの公理において a, b が $a \leq b$ を満たす場合にも定理になる。実際、n として 2 をとれば確かに $a < nb$ が満たされる。



アルキメデスの公理はことわざ「塵も積もれば山となる」に例えられることがある。というのは、その公理が、「a がどんなに大きな正の数であって、b がどんなに小さな正の数であっても、b を繰り返し繰り返し加えていけばいつかは a を超えることができる」ことを主張していると解釈されるからである。

例 12 - 1 - 1 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ となる。

(証明)

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ n > N \ \Rightarrow \ \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

が成り立つことを示すために、まず、任意に $\varepsilon > 0$ をとる。1 と ε に対してアルキメデスの公理を適用し、$1 < N\varepsilon$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ が存在することがわかる。このとき、$n > N$ を満たすすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

となる。こうして、$(*)$ が成り立つことが示され、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ であることがわかった。 □

● 12 - 2 : カントールの公理

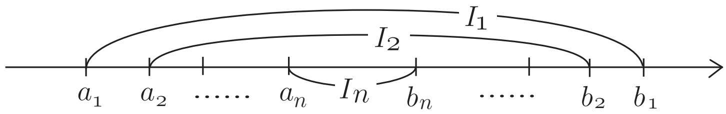
アルキメデスの公理は $\mathbb{Q}$ においても成り立つが、次のカントールの公理は $\mathbb{Q}$ では成り立たない。ここに $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ の決定的な違いがある。

カントールの公理(区間縮小法の原理)

閉区間の減少列 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots\cdots$ が任意に与えられたとき、すべての I_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ に共通に含まれる実数が存在する。すなわち、$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \varnothing$ である。

例えば、次のように定義される閉区間の減少列 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots\cdots$ を考えてみよう。

[*]**公理**とは、これから考えようとする理論の土台となる約束ごと・前提のことである。通常、公理は複数の“原始的な命題”からなり、公理に掲げられている命題は無条件にすべて正しいと認める。



まず、$I_1 = [1,2]$ とする。次に、I_1 を 10 等分して $(1+\frac{a_1}{10})^2 < 2 < (1+\frac{a_1+1}{10})^2$ を満たす $a_1 \in \{0,1,\ldots,9\}$ を探す。$a_1 = 4$ とわかる。そこで、$I_2 = [1.4, 1.5]$ とおく。次に、I_2 を 10 等分して $(1.4+\frac{a_2}{100})^2 < 2 < (1.4+\frac{a_2+1}{100})^2$ を満たす $a_2 \in \{0,1,\ldots,9\}$ を探す。$a_2 = 1$ とわかる。そこで、$I_3 = [1.41, 1.42]$ とおく。以下、同様にして閉区間 $I_4, I_5, \cdots$ を帰納的に定める。すると、カントールの公理から $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ は空でないことがわかるが、そこに属する元は $\sqrt{2}$ に他ならない。自乗して 2 になる数 $\sqrt{2}$ の存在をカントールの公理が保証していると言える。

カントールの公理は閉区間に対するものであり、開区間に置き換えると成り立たない。

● 12 - 3 : 数列の極限と上界・下界

有界の概念を細分化し、上に有界、下に有界と呼ばれる概念を導入する。

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**上に有界**であるとは、条件「すべての自然数 n に対して $a_n \le \xi$」が満たされるような実数 ξ のことをいう。この条件を論理記号を用いて書くと次のようになる：

$$\exists \xi \in \mathbb{R} \ \text{ s.t. } \ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \le \xi.$$

同様に、**下に有界**であるとは、

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \ \text{ s.t. } \ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \ge \lambda$$

が成り立つときをいう。上記の ξ を数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**上界**といい、λ を**下界**という。

ξ が $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上界ならば、それよりも大きな任意の実数も $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上界である。

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束すれば、[命題 11 - 2 - 1] より上界と下界が存在する。その上界・下界と数列の極限との間には次の不等式が成り立つ (これは、はさみうちの原理 ([命題 11 - 4 - 1]) から直ちに示される)。

命題 12 - 3 - 1
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するとし、$\xi \in \mathbb{R}$ をその 1 つの上界、$\lambda \in \mathbb{R}$ をその 1 つの下界とする。このとき、$\lambda \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \xi$ が成り立つ。すなわち、

$$\lambda \le a_n \le \xi \ \ (n = 1, 2, 3, \ldots\ldots) \ \Longrightarrow \ \lambda \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \xi.$$

次の定理は実数の連続性から導かれる。

定理 12 - 3 - 2 (上限・下限の存在定理)
(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界ならば最小上界、すなわち、次の条件 (i),(ii) を満たす実数 α が存在する。

(i) $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \le \alpha,$

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ \alpha - \varepsilon < a_N.$

この α を数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**上限**といい、$\sup\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ で表わす。

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が下に有界ならば最大下界、すなわち、次の条件 (i),(ii) を満たす実数 β が存在する。

(i) $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \ge \beta,$

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ \beta + \varepsilon > a_N.$

この β を数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**下限**といい、$\inf\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ で表わす。

注意. (1)(i) は α が $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上界であることを表わしており、(1)(ii) は「α よりも少しでも小さい（任意に $\varepsilon > 0$ をとって $\alpha - \varepsilon$ を考える）と、それよりも大きな a_n が存在する（つまり、上界ではなくなる）」ということを表わしている。このことを考えれば、(1) の (i)(ii) の条件を満たす α が $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の最小上界であることは容易に理解できる。

(**[定理 12 - 3 - 2] の証明**)

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を上に有界な数列とする。まず、$b_1 := a_1 - 1$ とおき、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上界 c_1 を $b_1 < c_1$ を満たすように 1 つ取る。次に、自然数 n に対して $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上界でない実数 b_n と $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上界 c_n で $b_n < c_n$ を満たすものが定義されたとき、実数 b_{n+1}, c_{n+1} を次のように定める。

$$\begin{cases} \frac{b_n+c_n}{2} \text{ が } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ の上界の場合、} & b_{n+1} := b_n,\ c_{n+1} := \frac{b_n+c_n}{2}. \\ \frac{b_n+c_n}{2} \text{ が } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ の上界でない場合、} & b_{n+1} := \frac{b_n+c_n}{2},\ c_{n+1} := c_n. \end{cases}$$

$b_{n+1} \leq c_{n+1}$ を満たす。各 n に対して $b_n < c_n$ なので、閉区間 $I_n := [b_n, c_n]$ が定義される。すると、次の 2 つが成り立つ。

(☆) $$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots\cdots$$

(★) $$c_n - b_n = \frac{c_{n-1} - b_{n-1}}{2} = \cdots = \frac{c_1 - b_1}{2^{n-1}} \leq \frac{c_1 - b_1}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(☆) により、すべての I_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ に共通に含まれる実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在する（カントールの公理)。$\alpha = \lim_{n\to\infty} c_n$ である。

$\because$)

任意の $\varepsilon > 0$ に対して、アルキメデスの公理より、

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ c_1 - b_1 < N\varepsilon$$

が成り立つ (そこで、そのような $N \in \mathbb{N}$ を 1 つとる)。このとき、$n > N$ を満たすすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$0 \leq c_n - \alpha \leq c_n - b_n \leq \frac{c_1 - b_1}{n} < \frac{c_1 - b_1}{N} < \varepsilon$$

となる (最初の 2 つの不等式は $\alpha \in I_n$ であることから導かれる)。故に、$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し、その極限は α である。 □

(i) が成り立つことを示す。$a_{n_0} > \alpha$ となる $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在すると仮定し、矛盾を導く。$\alpha \in [b_n, c_n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ と $\alpha = \lim_{n\to\infty} c_n$ より、$\varepsilon_0 := \dfrac{a_{n_0} - \alpha}{2} > 0$ に対して、

$$n > N \implies 0 \leq c_n - \alpha < \varepsilon_0$$

となる $N \in \mathbb{N}$ が存在する (そこで、そのような $N \in \mathbb{N}$ を 1 つとる)。$n = \max\{N+1, n_0\}$ とおくと、c_n は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上界だから、$a_{n_0} \leq c_n < \alpha + \varepsilon = \dfrac{a_{n_0} + \alpha}{2}$ となり、$a_{n_0} > \alpha$ に矛盾する。よって、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq \alpha$ である。

次に、任意に $\varepsilon > 0$ をとり、(ii) が成り立つことを示す。仮に、このような N が存在しないと仮定すると、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\alpha - \varepsilon \geq a_n$ となる。アルキメデスの公理により、

$$\exists\, n \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ c_1 - b_1 < n\varepsilon$$

が成り立つ (そこで、そのような $n \in \mathbb{N}$ を 1 つとる)。すると、(★) より

(♯1) $$c_n - b_n \leq \frac{c_1 - b_1}{n} < \varepsilon$$

を得る。しかし、b_n は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上界でないから、

$$\exists\, m \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ b_n < a_m$$

よって、

$$(\sharp 2) \qquad \varepsilon \leq \alpha - a_m \leq \alpha - b_n \leq c_n - b_n$$

となる ($\because \alpha \in I_n = [b_n, c_n]$ より $\alpha \leq c_n$)。($\sharp$1) と ($\sharp$2) は矛盾する。よって、(ii) が成り立つ。 □

● 12 - 4 : 数列の単調性と収束

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**単調増加** (monotone increasing) であるとは、

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$$

が成り立つときをいい、**単調減少** (monotone decreasing) であるとは、

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots$$

が成り立つときをいう。

アルキメデスの公理とカントールの公理から、次の定理を導くことができる。

定理 12 - 4 - 1 (ワイエルストラスの定理 (上限公理))
上に有界な単調増加数列は収束する。

(証明)

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を上に有界な単調増加数列とすると、[定理 12 - 3 - 2(1)] の (i),(ii) を満たす $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在する。このとき、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が単調増加であることから、

$$\alpha - \varepsilon < a_N \leq a_{N+1} \leq a_{N+2} \leq \cdots\cdots \leq \alpha$$

がわかる。よって、$n > N$ を満たすすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\alpha - \varepsilon < a_n \leq \alpha$、すなわち、$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ。これは $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であることを意味する。 □

注意：定理と同様に、下に有界な単調減少数列は収束する。

例 12 - 4 - 2 k を正の実数とし、$a_1 = 1$ と漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{k}{a_n}\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ により定義される数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える。この数列は下に有界であり、第 2 項以降は単調減少である。実際、(相加平均) $\geq$ (相乗平均) により、次の不等式を得る：

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{k}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{k}{a_n}} = \sqrt{k} \qquad (n = 1, 2, \ldots\ldots).$$

したがって、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界である。また、$n \geq 2$ に対して $a_n^2 \geq (\sqrt{k})^2 = k$ であるから、

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{k}{a_n}\right) - a_n = \frac{k - a_n^2}{2a_n} \leq 0$$

となる。故に、$\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ は単調減少数列である。

[定理 12 - 4 - 1] により、数列は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する。その極限を α とおくと、[命題 12 - 3 - 1] により、$\alpha \geq \sqrt{k} > 0$ である。さらに、

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{k}{\lim_{n\to\infty} a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{k}{\alpha}\right)$$

であるから、これを解いて $\alpha = \sqrt{k}$ がわかる。 □

注意：この数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\sqrt{k}$ の近似値の計算に使うことができる。

演習 12- 1 * 初期条件 $a_1 = 1$ と漸化式 $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ により定まる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加列であることを示し、$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。