§12. 連立一次方程式の基本解

ここでは、解は存在するが、ただ一つではない場合の、連立一次方程式の解法、および、解全体からなる集合について考察する。この場合、連立一次方程式の解全体は無限集合になる。無限集合は元を列挙することにより表わすことができないので、解の表示方法に工夫が必要になる。そこで登場するのが基本解という考え方である。基本解について述べる前に、連立一次方程式の解全体からなる集合を簡潔に記述するための道具と概念を導入しよう。

● 12 - 1 : 数ベクトル空間

今後、実数全体からなる集合を記号 $\mathbb{R}$ で表わす。例えば、$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ である。

さて、n 次列ベクトル同士には和が定義され、実数と n 次列ベクトルにはスカラー倍が定義されたことを思い出そう。

- 和：２つのベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して、$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.
- スカラー倍：実数 t とベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に対して、$t\mathbf{x} = \begin{pmatrix} tx_1 \\ \vdots \\ tx_n \end{pmatrix}$.

例 12 - 1 - 1 $2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + (-1) \\ 2 \cdot 2 + 2 \\ 2 \cdot 3 + (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

n 次列ベクトルの全体からなる集合を $\mathbb{R}^n$ で表わす：

(12 - 1 a)
$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{R}, \ \cdots, \ x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

ベクトルの集合 $\mathbb{R}^n$ を単なる集合でなく、上で定義した和とスカラー倍をそなえた集合と考えるとき、$\mathbb{R}^n$ を n 次元**数ベクトル空間**という。

成分がすべて 0 の n 次列ベクトル $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ を**零ベクトル**という。

● 12 - 2 : 連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解集合

ここでは、連立一次方程式が解を持つ場合に、その解全体のなす集合について考察しよう。

例 12 - 2 - 1 連立一次方程式

(☆)
$$\begin{cases} x + \ \ y + \ \ z + w = 1 \\ x + 2y \qquad - w = 0 \\ x + 2y + 2z \qquad = 2 \end{cases}$$

の実数解をガウスの消去法を用いて求めよう。拡大係数行列を行基本変形して、

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$\|$

A とおく

を得る。与えられた連立一次方程式を解くことは、連立一次方程式

$$\begin{cases} x+y+\ z+\ w=\ 1 \\ \quad\ \ y-\ z-2w=-1 \\ \qquad\quad 2z+\ w=\ 2 \end{cases}$$

を解くことと同じである。ここから後退代入で解いていくが、以前のときとは違い、最後の式 $2z+w=2$ から w は求められない。しかし、2 つの変数 z と w のうち、どちらか一方を決めればもう一方は決まるので、ここでは z を決めることにして、$z=t$ $(t\in\mathbb{R})$ とおく。すると、w は $w=-2t+2$ と求まる。これを 2 番目の式に代入して $y=-3t+3$ が得られる。最後に 1 番目の式に代入して $x=4t-4$ が得られる。こうして、与えられた連立一次方程式 (☆) の実数解は次で与えられることがわかる：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t-4 \\ -3t+3 \\ t \\ -2t+2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (t\in\mathbb{R})$$

$\|$ $\|$

$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の解　$\mathbf{x}_0$ は (☆) の解 □

上の例の連立一次方程式の解において、t を含む最初の項は $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の解になっており、$\mathbf{x}_0=\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ は与えられた連立一次方程式の 1 つの解になっていることに注意しよう。このような現象—任意の解が、$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の解に 1 つの解 $\mathbf{x}_0$ を加えた形で与えられること—は一般の連立一次方程式で成り立つ。すなわち、

定理 12-2-2

連立一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ が実数解 $\mathbf{x}_0$ を持つと仮定する。このとき、この連立一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ の任意の実数解は

(12-2 a) 　　(連立一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の実数解) $+\,\mathbf{x}_0$

で与えられる。

上の定理より、連立一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ の解の集合の研究は、連立一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の解の集合の研究に帰着されることがわかる。

● 12-3：連立一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の基本解

ここでは、定数項ベクトルが零ベクトルであるような連立一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の実数解全体のなす集合について考える。

まず、連立一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ は $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ を必ず解に持つことに注意しよう。この解を**自明な解**という。

連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ のすべての実数解を求めるために、(m, n)-行列 $A = (a_{ij})$ に行基本変形を施す。その結果、次の (m, n)-行列が得られたとしよう。

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} \\ & 1 & \cdots & 0 & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} \\ & \text{O} & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ & & & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{12-3 a}$$

(注：列の入れ替えも行えばこの形にいつでも変形することができる。但し、その場合、連立一次方程式の変数の順番が入れ替わる。）r は A の階数 $\mathrm{rank}\, A$ に等しい。

$r < n$ の場合と $r = n$ の場合が考えられる。

Case 1　$r < n$ の場合：連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解くことは連立一次方程式 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解くことと同値である。$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とおくと、$B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は次の連立一次方程式となる：

$$\begin{cases} x_1 + b_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + b_{1n}x_n = 0, \\ x_2 + b_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + b_{2n}x_n = 0, \\ \qquad \cdots\cdots \\ x_r + b_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + b_{rn}x_n = 0. \end{cases}$$

したがって、$x_{r+1} = t_1, \cdots, x_n = t_{n-r}$ $(t_1, \cdots, t_{n-r} \in \mathbb{R})$ と定めると、$x_1, \cdots, x_r$ は $t_1, \cdots, t_{n-r}$ を用いて表わすことができ、連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の任意の実数解は、

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 + \cdots + t_{n-r}\mathbf{x}_{n-r} \qquad (t_1, \cdots, t_{n-r} \in \mathbb{R})$$

と表わされることがわかる。但し、

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -b_{1,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -b_{1,r+2} \\ \vdots \\ -b_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \cdots, \mathbf{x}_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1n} \\ \vdots \\ -b_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12-3 b}$$

である。(12-3 b) で与えられるベクトルの組 “$\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_{n-r}$” は以下の 2 つの性質を満たす。

(i) 連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の任意の実数解 $\mathbf{x}$ は “$\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_{n-r}$” の**一次結合**で表わされる。すなわち、

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{x}_1 + \cdots + t_{n-r}\mathbf{x}_{n-r} \qquad (t_1, \cdots, t_{n-r} \in \mathbb{R})$$

と書き表わされる。

(ii) “$\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_{n-r}$” は**一次独立**である。すなわち、

$$t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 + \cdots + t_{n-r}\mathbf{x}_{n-r} = \mathbf{0}\ \ (t_1, \cdots, t_{n-r} \in \mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad t_1 = \cdots = t_{n-r} = 0$$

が成り立つ。

(i), (ii) の性質を持つ、実数解の組 “$\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{n-r}$” を連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の**基本解**という。基本解となり得るベクトルの組 “$\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{n-r}$” は一通りではなく、沢山ある。

注意：(ii) は、連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解を表わすために、$\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_{n-r}$ のすべてが必要であること、つまり、これらの中からどの 1 つを取り除いても、取り除いた解 $\mathbf{x}_i$ をそれ以外の解 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \cdots, \mathbf{x}_{n-r}$ を用いて (i) のように表わすことはできないこと意味している。

<u>Case 2</u>　$r = n$ の場合：

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & \cdots & 0 \\ & \text{O} & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

であるから、連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は自明な解しかもたない。

上で得られた結果を定理としてまとめておこう。

定理 12-3-1

階数 r の (m, n)-行列 A について、

(12-3 c)　　連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が非自明な解を持つ $\iff$ $r < n$

である。このとき、さらに、“$\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{n-r}$” をその一組の基本解とすれば、連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の任意の実数解は

(12-3 d)　　$t_1\mathbf{x}_1 + \cdots + t_{n-r}\mathbf{x}_{n-r} \qquad (t_1, \cdots, t_{n-r} \in \mathbb{R})$

により与えられる。

<u>**例 12-3-2**</u>　連立方程式

$$\begin{cases} x + y - z + w = 0 \\ -x + y + z + w = 0 \end{cases}$$

の係数行列を A とおき、A に行基本変形を施して、行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が得られる。$\operatorname{rank} A = 2 < 4 =$ (未知数の個数) であるから、与えられた連立一次方程式には非自明な解が存在する。$B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解いて、連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の任意の実数解は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

によって与えられることがわかり、与えられた連立方程式の一組の基本解として、

“$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$” を見つけることができる。 □

No.12 2024 年 6 月 27 日

線形代数 1 事前練習用演習問題

pre12-1. (ガウスの消去法)

連立一次方程式

$$\begin{cases} x+6y+4z= \ \ 3 \\ 6x+3y+2z=-4 \\ -4x+9y+6z= \ 10 \end{cases}$$

の実数解を、ガウスの消去法により、求めよ。

pre12-2. (連立一次方程式の基本解)

行列

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 5 & 3 & -9 \\ 4 & 3 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

について、以下の問いに答えよ。

(1) $\operatorname{rank} A$ を求めよ。

(2) A を係数行列とする連立一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ は非自明な解を持つか？非自明な解を持つ場合には、その連立一次方程式の基本解を 1 組求めよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

---

pre12-1. [例 12 - 2 - 1] と同じ方法で解くことができる。

与えられた連立一次方程式の拡大係数行列を行基本変形して、階段行列にする。すると、

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & -4 \\ -4 & 9 & 6 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[①\times 4+③]{①\times(-6)+②} \cdots\cdots \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となる。最後に得られた階段行列を連立一次方程式に戻すと、次のようになる。

$$\begin{cases} x+6y+4z=3 & \cdots\cdots ① \\ \quad\ 3y+2z=2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

これを後退代入で解く。②より、$z=t$ $(t\in\mathbb{R})$ とおいて、$y=-\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}$ を得る。これを ①に代入して $x=-1$ を得る。よって、与えられた連立一次方程式の実数解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3}t+\frac{2}{3} \\ t \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (t\in\mathbb{R})$$

である。

pre12-2. [例 12 - 3 - 2] を参考にして解くことができる。

(1) A に、ガウスの消去法の前進部分に相当する行基本変形を施して、階段型にすると、

$$A \xrightarrow[①\times(-4)+③]{①\times(-3)+②} \cdots\cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

となる。よって、$\operatorname{rank} A=3$ である。

(2) $\operatorname{rank} A = 3 < 4$ であるから、連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は非自明な解を持つ。$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$ とおくと、

$$\begin{aligned} &\text{連立一次方程式 } A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ を解く} \\ \Longleftrightarrow\ &\text{連立一次方程式 } B\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ を解く} \end{aligned}$$

である。 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を後退代入により解くことで、連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の実数解は

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

により与えられることがわかる。このように、連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の基本解として "$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$" を見つけることができる。

線形代数１・第 12 回 (2024 年 6 月 27 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数１・第12回学習内容チェックシート

2024年6月27日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
$\mathbb{R}^n$ とは？	p.	
連立一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の自明な解とは？	p.	

Q2. 次の $\boxed{}$ に適当な言葉、数字、数式、記号等を入れなさい。

- 「x が実数である」ことを記号で $\boxed{}$ のように表わす。
- n 次列ベクトル $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ および実数 t に対して、

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\boxed{}, \qquad t\mathbf{x}=\boxed{}.$$

- (m,n)-行列 A を係数行列とする連立一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ が非自明な解を持つかどうかを調べるには、A の階数 r が $\boxed{}$ を満たすかどうかを調べればよい。連立一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ が非自明な解を持つとき、連立一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の任意の実数解 $\mathbf{x}$ は、$\boxed{}$ であるような n 次列ベクトルの組 "$\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_{n-r}$" を用いて

$$\mathbf{x}=\boxed{}$$

のように表わされる。組 "$\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_{n-r}$" を連立一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の $\boxed{}$ という。

- $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を係数行列とする連立一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の実数解は

$$\mathbf{x}=\boxed{}$$

であり、$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を係数行列とする連立一次方程式 $B\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の実数解は

$$\mathbf{x}=\boxed{}$$

である。

Q3. 第12回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。