§12. 階数の応用—ベクトルの一次独立性—

ここでは、ベクトルが一次独立かどうかは、それらを横に並べて作られる行列の階数を求めることにより調べられることを説明する。また、今まで得られた知識を総合して、正方行列が正則であるための必要十分条件を 4 つ述べる。

● 12 - 1 : 一次独立と一次従属

「一次独立」の概念は前節で導入されたが、定義を復習しておこう。

$\mathbb{R}^n$ のベクトルの組 “$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_d$” は、

(12 - 1 a) $$t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_d\mathbf{v}_d = \mathbf{0} \ \ (t_1, \ \cdots, t_d \in \mathbb{R}) \ \Longrightarrow \ t_1 = \cdots = t_d = 0$$

を満たすとき、**一次独立**であると呼ばれ、そうでないとき、**一次従属**であると呼ばれる。次の言い換えが可能である：

補題 12 - 1 - 1

“$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_d$” が一次従属

$\Longleftrightarrow$ $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_d$ のある 1 つが残りのベクトルの一次結合で表される

(**証明**)

「$\Longrightarrow$」の証明：“$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_d$” が一次従属ならば、同時には 0 でない実数 $t_1, \cdots, t_d$ であって、$t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_d\mathbf{v}_d = \mathbf{0}$ を満たすものが存在する。$t_j \neq 0$ であったとすると、

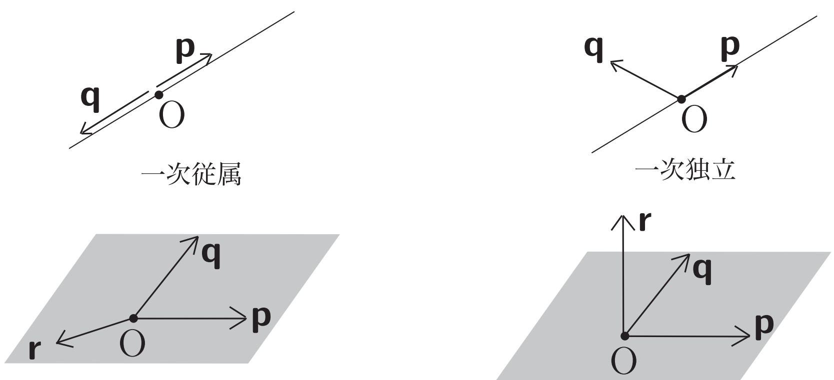
$$\mathbf{v}_j = -\frac{t_1}{t_j}\mathbf{v}_1 - \cdots - \frac{t_{j-1}}{t_j}\mathbf{v}_{j-1} - \frac{t_{j+1}}{t_j}\mathbf{v}_{j+1} - \cdots - \frac{t_d}{t_j}\mathbf{v}_d$$

のように、$\mathbf{v}_j$ は $\mathbf{v}_j$ 以外の残りのベクトルの一次結合により表わされる。

「$\Longleftarrow$」の証明：$\mathbf{v}_j$ が

$$\mathbf{v}_j = s_1\mathbf{v}_1 + \cdots + s_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + s_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} + \cdots + s_d\mathbf{v}_d \quad (s_1, \cdots, s_{j-1}, s_{j+1}, \cdots, s_d \in \mathbb{R})$$

と表わされたとする。$\mathbf{v}_j$ を移項してから $t_i = s_i \ (i \neq j)$, $t_j = -1$ とおくと、$t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_d\mathbf{v}_d = \mathbf{0}$ となる。実数 $t_1, \cdots, t_d$ は同時には 0 でなく、$t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_d\mathbf{v}_d = \mathbf{0}$ が成り立つので、“$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_d$” は一次従属である。 □



例 12 - 1 - 2

(1) 平面 $\mathbb{R}^2$ における 2 つのベクトル $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ について、点 P, Q を $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \mathbf{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \mathbf{q}$ により定めると、

$$“\mathbf{p}, \ \mathbf{q}” \text{ が一次従属} \ \Longleftrightarrow \ \mathrm{O, P, Q} \text{ が同一直線上にある}$$

(2) 3次元空間 $\mathbb{R}^3$ における3つのベクトル $\mathbf{p},\ \mathbf{q},\ \mathbf{r}$ について、点 $\mathrm{P,Q,R}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \mathbf{p},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \mathbf{q},\ \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \mathbf{r}$ により定めると、

$$\text{“}\mathbf{p},\ \mathbf{q},\ \mathbf{r}\text{” が一次従属} \iff \mathrm{O,P,Q,R} \text{ が同一平面上にある}$$

次の例のように、ベクトルの組が「横に 1 つ進むごとに 1 段下がる」形の階段型をなすとき、一次独立であることを示すのは容易である。

例 12-1-3 $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組“$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$” は一次独立である。

(**証明**)

$t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + t_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ $(t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R})$ とおく。この等式を成分で書くと、連立一次方程式

$$\begin{cases} t_1 & + & 2t_2 & + & 3t_3 & = & 0 \\ & & 4t_2 & + & 5t_3 & = & 0 \\ & & & & 6t_3 & = & 0 \end{cases}$$

になる。後退代入で解き、$t_3 = t_2 = t_1 = 0$ を得る。よって、“$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$” は一次独立である。 □

● 12-2: 一次独立なベクトルの個数の上限

前節において、階数 r の (m, n)-行列 A について、次が成り立つことを示した:

(12-2 a) 連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が非自明な解を持つ $\iff$ $r < n$

このことから、次の定理が得られる。

定理 12-2-1

m 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^m$ において、任意の $(m+1)$ 個のベクトルは一次従属である。

(**証明**)

$\mathbb{R}^m$ から任意に $(m+1)$ 個のベクトル $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_{m+1}$ をとり、

$(*)$ $$t_1\mathbf{a}_1 + \cdots + t_m\mathbf{a}_m + t_{m+1}\mathbf{a}_{m+1} = \mathbf{0} \qquad (t_1, \cdots, t_m, t_{m+1} \in \mathbb{R})$$

とおく。$A = (\mathbf{a}_1\ \cdots\ \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_{m+1})$ とおくと、$(*)$ は、

$(**)$ $$A\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \\ t_{m+1} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

と表わされる。$\operatorname{rank} A \leq m < m+1 =$ (未知数の個数) であるから、A を係数行列とする連立一次方程式 $(**)$ は非自明な解を持つ。つまり、“$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_{m+1}$” は一次従属である。 □

● 12-3: 行列の階数とベクトルの一次独立性

定理 12-3-1

行列 $A = (\mathbf{a}_1\ \cdots\ \mathbf{a}_n)$ について、

(12-3 a) $\operatorname{rank} A = r$ $\iff$ $\mathbf{a}_1,\ \cdots, \mathbf{a}_n$ の中の一次独立なものの最大個数が r .

先に、定理の使い方を見ておこう。

例 12 - 3 - 2 4 つのベクトル

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は一次独立かどうかを調べよう。そのためには、[定理 12 - 3 - 1] により、行列 $A = (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4)$ の階数が 4 になるかどうかを調べればよい。A に行基本変形を施して階段行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を得る。よって、$\operatorname{rank} A = 3$ であり、“$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$” は一次独立でない。 □

問 $\operatorname{rank} A = 3$ なので、[定理 12 - 3 - 1] により、上の例における 4 つのベクトル $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3,\ \mathbf{v}_4$ のうち、ある 3 つは一次独立である。その 3 つを特定することはできるか？

● 12 - 4 : 行基本変形とベクトルの一次独立性

次の補題は、行基本変形の下では一次独立になる列番号の組み合わせは変わらないことを主張している。

補題 12 - 4 - 1
(m, n)-行列 $A = (\mathbf{a}_1\ \cdots\ \mathbf{a}_n)$ に行基本変形を有限回施して行列 $B = (\mathbf{b}_1\ \cdots\ \mathbf{b}_n)$ が得られたとする。このとき、“$\mathbf{a}_{i_1}, \cdots, \mathbf{a}_{i_k}$” が一次独立ならば、“$\mathbf{b}_{i_1}, \cdots, \mathbf{b}_{i_k}$” も一次独立である。

(**証明**)

行列 B は行列 A から行基本変形を有限回施して得られているので、ある m 次正則行列 P が存在して、$B = PA$ となる。$(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \cdots\ \mathbf{b}_n) = P(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n)$ の第 j 列を比較して

(※) $$\mathbf{b}_j = P\mathbf{a}_j \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

を得る。今、$s_{i_1}\mathbf{b}_{i_1} + \cdots + s_{i_k}\mathbf{b}_{i_k} = \mathbf{0}$ $(s_{i_1}, \cdots, s_{i_k} \in \mathbb{R})$ とおく。この等式は

$$s_{i_1}P\mathbf{a}_{i_1} + \cdots + s_{i_k}P\mathbf{a}_{i_k} = \mathbf{0}$$

と書き変えられる。左辺は $P(s_{i_1}\mathbf{a}_{i_1} + \cdots + s_{i_k}\mathbf{a}_{i_k})$ に等しいから、

$$P(s_{i_1}\mathbf{a}_{i_1} + \cdots + s_{i_k}\mathbf{a}_{i_k}) = \mathbf{0}$$

となる。P は正則であるから、両辺に左から逆行列 P^{-1} を掛けて、$s_{i_1}\mathbf{a}_{i_1} + \cdots + s_{i_k}\mathbf{a}_{i_k} = \mathbf{0}$ を得る。“$\mathbf{a}_{i_1}, \cdots, \mathbf{a}_{i_k}$” は一次独立であるから、この式が成り立つのは $s_{i_1} = \cdots = s_{i_k} = 0$ のときに限る。したがって、“$\mathbf{b}_{i_1}, \cdots, \mathbf{b}_{i_k}$” は一次独立である。 □

注意：上の補題から、行基本変形の下では一次独立な列ベクトルの最大個数は変わらないことがわかり、したがって、行列の階数が行基本変形の仕方によらずに一定なことがわかる。

例 12 - 4 - 2 上の補題を使って、[例 12 - 3 - 2] の 4 つのベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ の中で、どの 3 つが一次独立になっているのかを特定しよう。

$(\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4)$ から行基本変形により得られた階段行列 B に着目する。$B = (\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3\ \mathbf{b}_4)$ とおくと、[例 12 - 1 - 3] と同様の考察により、“$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$” は一次独立であることがわかる。[補題 12 - 4 - 1] により、行基本変形の下では一次独立となる列番号の組み合わせは変わらないので、“$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$” は一次独立であることがわかる。

連立一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の実数解は、$B\mathbf{x}=\mathbf{0}$ を解いて、$\mathbf{x}=t\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ $(t\in\mathbb{R})$ であることがわかる。したがって、$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4$ の間に、関係式 $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3+\mathbf{v}_4=\mathbf{0}$ が成り立つ。 □

● 12 - 5 : [定理 12 - 3 - 1] の証明

$r=\operatorname{rank}A$ とおく。行基本変形と (必要ならば) 列の入れ換えを行なって、A から行列

$$B=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&b_{1,r+1}&\cdots&b_{1n}\\ &1&\cdots&0&b_{2,r+1}&\cdots&b_{2n}\\ &\text{\Large O}&\ddots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\ &&&1&b_{r,r+1}&\cdots&b_{rn}\\ 0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\ 0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

が得られる。[補題 12 - 4 - 1] により、A の列ベクトルの中で一次独立なものの最大個数と B の列ベクトルの中で一次独立なものの最大個数とは等しく、さらに、B の列ベクトルの中で一次独立なものの最大個数は、

$$B'=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&b_{1,r+1}&\cdots&b_{1n}\\ &1&\cdots&0&b_{2,r+1}&\cdots&b_{2n}\\ &\text{\Large O}&\ddots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\ &&&1&b_{r,r+1}&\cdots&b_{rn}\end{pmatrix}$$

の中で一次独立なものの最大個数に等しい。$B'=(\mathbf{b}'_1\ \cdots\ \mathbf{b}'_r\ \mathbf{b}'_{r+1}\ \cdots\ \mathbf{b}'_n)$ とおくと、$\mathbf{b}'_1,\ \cdots,\ \mathbf{b}'_r$ は一次独立になっているが、[定理 12 - 2 - 1] により、B' の列ベクトルの中のどの $(r+1)$ 個の組み合わせも一次従属である。したがって、B' の列ベクトルの中で一次独立なものの最大個数は r である。故に、A の列ベクトルの中で一次独立なものの最大個数は r に一致する。 □

● 12 - 6 : 正則性の同値な条件

[定理 11 - 4 - 3] と (12 - 2 a), [定理 12 - 3 - 1] により、次の定理を得る。

定理 12 - 6 - 1

n 次正方行列 A に対して次の 5 つは互いに同値である：

(1) $\operatorname{rank}A=n.$

(2) A は正則である。

(3) $|A|\neq 0.$

(4) 連立一次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の実数解は自明な解のみである。

(5) A の列ベクトル "$\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n$" は一次独立である。

(**証明**)

「(1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (3)」は [定理 11 - 4 - 3] で証明済みである。「(1) $\Longleftrightarrow$ (4)」は (12 - 2 a) により、「(1) $\Longleftrightarrow$ (5)」は [定理 12 - 3 - 1] により成立する。 □

No.12 2026 年 6 月 25 日

線形代数 1 事前練習用演習問題

pre12-1. (一次独立性の階数を用いた判定)

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 & -4 \\ 4 & 0 & 8 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & -4 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 12 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ。

(1) A の階数 $\operatorname{rank} A$ を求めよ。

(2) A の列ベクトルの中で一次独立となるものの組を考えたとき、その組に含まれるベクトルの個数の最大値を求めよ。さらに、そのような組を 1 組与えよ。

pre12-2. (行列の階数と一次独立性)

次の 3 次列ベクトルの組は一次独立か、一次従属かを判定せよ。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

これらのベクトルが一次従属であった場合には、$s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2 + u\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ を満たす同時には 0 でない実数 s, t, u を 1 組見つけよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre12-1. [例 12 - 3 - 2] と [例 12 - 4 - 2] を参考に解答するとよい。

(1) A に、ガウスの消去法に基づいて有限回行基本変形を施すと、階段行列

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が得られる。よって、$\operatorname{rank} A = 2$ である。

(2) $\operatorname{rank} A = 2$ なので、A の列ベクトルの中で一次独立となる組のうち、その組に含まれるベクトルの個数の最大値は 2 である。(1) で求めた階段行列 B において「段」が 1 つ下がる部分の列番号に注目することにより、第 1 列と第 2 列からなる組は一次独立であることがわかる。行基本変形において一次独立となる列番号の組み合わせは変わらないので、A においても第 1 列と第 2 列からなる組は一次独立であることがわかる。こうして、A の列ベクトルの中で一次独立となる組のうち最大個数からなるものとして、“$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$” が見つかる。

pre12-2. この問題も [例 12 - 3 - 2] と [例 12 - 4 - 2] を参考に解答するとよい。

$A = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3)$ とおき、$\operatorname{rank} A$ を計算する。A に、ガウスの消去法に基づいて有限回行基本変形を施すと、階段行列

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が得られる。よって、$\operatorname{rank} A = 2 < 3$ であるから、“$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$” は一次従属である。

連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の実数解は、ガウスの消去法を用いて解くと、$\mathbf{x} = t\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ により与えられることがわかる。よって、$s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2 + u\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ を満たす同時には 0 でない実数 s, t, u の 1 組は $(s, t, u) = (-5, -2, 1)$ である。

線形代数１・第 12 回 (2026 年 6 月 25 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数１・第 12 回学習内容チェックシート 2026 年 6 月 25 日

学 籍 番 号 ____________________ 氏 名 ____________________________

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
“$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_d$” が一次独立であるとは？	p.	
“$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_d$” が一次従属であるとは？	p.	

Q2.

- $\mathbb{R}^2$ における 2 つのベクトル “$\mathbf{p}, \mathbf{q}$” が一次独立である状況と一次従属である状況をそれぞれ右に図示しなさい。
- $\mathbb{R}^3$ における 3 つのベクトル “$\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$” が一次独立である状況と一次従属である状況をそれぞれ右に図示しなさい。

一次独立	一次従属

Q3. 行列 $A = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4\ \mathbf{a}_5)$ に行基本変形を行って、行列

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が得られたとする。次の $\boxed{\quad}$ に適当な言葉、数字、記号等を入れなさい。

- B の形から、$\operatorname{rank} A = \boxed{\quad}$ であることがわかる。したがって、A の列ベクトルの中で一次独立となるものの最大個数は $\boxed{\quad}$ である。
- 一次独立の定義により、行列 B の第 $\boxed{\quad}$ 列、第 $\boxed{\quad}$ 列、第 $\boxed{\quad}$ 列の 3 つのベクトルは一次独立になっていることがすぐにわかる。したがって、A の列ベクトル $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_5$ のうち、$\boxed{\qquad\qquad}$ は一次独立である。というのは、$\boxed{\qquad\qquad}$ の下では、一次独立になる $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ が変わらないからである。

Q4. n 次正方行列 $A = (\mathbf{a}_1\ \cdots\ \mathbf{a}_n)$ が正則であるための必要十分条件を 4 つ列挙しなさい。

- $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$
- $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$
- $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$
- $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

Q5. 第 12 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。