§12. 線形写像とその行列表示

数ベクトル空間の間の線形写像を以前定義した。ここでは、一般のベクトル空間の間の線形写像について考察する。有限次元ベクトル空間の間の線形写像は、基底を指定することによって、行列で表示することができる。こうして、線形写像を行列を通して研究することが可能になる。

● 12-1：線形写像

一般のベクトル空間の間の線形写像は数ベクトル空間の間の線形写像と全く同じ条件で定義される。

定義 12-1-1
V, U を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする。$F : V \longrightarrow U$ が次の2条件を満たすとき、($\mathbb{R}$-) **線形写像**と呼ばれる：

(LM1) 任意の $v, v' \in V$ に対して、$F(v + v') = F(v) + F(v')$.

(LM2) 任意の $v \in V$ と任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、$F(tv) = tF(v)$.

例 12-1-2 (1) 行列 $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ に対して、

$$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$$

によって定義される写像 $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ は線形写像である (これを A から定まる線形写像と呼ぶのであった)。

(2) $C^\infty(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された何回でも微分可能な関数全体からなる、$\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の部分空間とし、写像 $D : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ を

$$D(f) = \frac{df}{dx} \qquad (f = f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}))$$

によって定義する。D は $\mathbb{R}$-線形写像である。

(3) 各 $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ に対して

$$\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn} \tag{12-1 a}$$

を対応させる写像 $\mathrm{Tr} : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$-線形写像である。$\mathrm{Tr}(A)$ は A の**トレース**と呼ばれる。

(4) 各 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ に対して行列式 $|A|$ を対応させる写像は、$n \geq 2$ のとき、線形写像でない。実際、$|2E_n| = 2^n \neq 2 = 2|E_n|$ であるからである。

線形写像は次の性質を持つ。

補題 12-1-3
線形写像 $F : V \longrightarrow U$ に対して

(1) $F(0_V) = 0_U$.

(2) $F(-v) = -F(v) \quad (v \in V)$.

(**証明**)

(1) $0_V + 0_V = 0_V$ であるから、F の線形性により、

$$F(0_V) + F(0_V) = F(0_V)$$

が成り立つ。この両辺に $-F(0_V)$ を加えて、

$$\begin{aligned} F(0_V) &= F(0_V) + 0_U \\ &= F(0_V) + (F(0_V) - F(0_V)) \\ &= (F(0_V) + F(0_V)) - F(0_V) \\ &= F(0_V) - F(0_V) \\ &= 0_U \end{aligned}$$

を得る。

(2) $F(v) + F(-v) = F(v + (-v)) = F(0_V) = 0_U$ となるから、$F(-v) = -F(v)$ である。 □

● 12 - 2 : 線形写像の行列表示

線形写像の行列表示について説明する前に、「線形写像は基底の行き先により決まる」ことを示そう。

V, U を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし、$F : V \longrightarrow U$ を $\mathbb{R}$-線形写像とする。$\dim V = n$ であるとし、“$v_1, \cdots, v_n$” を V の基底とする。このとき、任意のベクトル $v \in V$ は

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n \qquad (t_1, \cdots, t_n \in \mathbb{R})$$

と一意的に表わされるから、F による像 $F(v)$ は

(12 - 2 a) $$F(v) = F(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n) = t_1 F(v_1) + \cdots + t_n F(v_n)$$

のように $F(v_1), \cdots, F(v_n)$ の一次結合で表わされる。このことは、線形写像 F を知るには、すべての $v \in V$ の写り先を知る必要はなく、基底 “$v_1, \cdots, v_n$” の写り先さえ知りさえすれば十分であることを意味している。

さて、U が有限次元であるときには、例えば $\dim U = m$ とし、“$u_1, \cdots, u_m$” をその基底とすると、各 $F(v_j)$ を $u_1, \cdots, u_m$ の一次結合で一意的に表わすことができる：

(12 - 2 b) $$F(v_j) = a_{1j} u_1 + \cdots + a_{mj} u_m \qquad (a_{ij} \in \mathbb{R}).$$

このようにして、V の基底 $\mathscr{B} =$ “$v_1, \cdots, v_n$” と U の基底 $\mathscr{B}' =$ “$u_1, \cdots, u_m$” を指定すると、線形写像 F から mn 個の $\mathbb{R}$ の元 a_{ij} $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ が定まる。これらの数を並べて、(m, n)-行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

が得られる。この行列 A を V の基底 $\mathscr{B}$ と U の基底 $\mathscr{B}'$ に関する F の**行列表示**と呼ぶ。A は (12 - 2 b) に現れる係数を縦に並べることによって作られている。

$$\begin{aligned} F(v_1) &= a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + \cdots + a_{m1} u_m \\ F(v_2) &= a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + \cdots + a_{m2} u_m \\ &\ \ \vdots \\ F(v_n) &= a_{1n} u_1 + a_{2n} u_2 + \cdots + a_{mn} u_m \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

F についての情報は行列表示 $A=(a_{ij})$ の中に完全に含まれている。V, U の基底が指定されているという仮定の下で、(m,n)-行列 A から線形写像 F を復元することが可能である。実際、写像 $F' : V \longrightarrow U$ を

$$F'(t_1v_1+\cdots+t_nv_n)=(t_1a_{11}+\cdots+t_na_{1n})u_1+\cdots+(t_1a_{m1}+\cdots+t_na_{mn})u_m$$

によって定義すると、F' は $\mathbb{R}$-線形写像であって、最初に与えられた線形写像 F と一致する。

例 12 - 2 - 1 $\mathbb{R}^2$ の 2 つの基底

$$\mathscr{B}=\text{“}\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\text{”},\qquad \mathscr{B}'=\text{“}\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\text{”}$$

に関して、線形写像 $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ は行列 $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$ により表わされているものとする。このとき、任意の $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ は $\mathbf{x}=(x-y)\mathbf{v}_1+y\mathbf{v}_2$ と表わされることがわかるから、$\mathbf{x}$ は F により

$$F(\mathbf{x})=F((x-y)\mathbf{v}_1+y\mathbf{v}_2)=(x+2y)\mathbf{u}_1+(2x+2y)\mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}-x-2y\\3x+4y\end{pmatrix}$$

に写される。 □

● 12 - 3 : 線形変換の行列表示

$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V から V 自身への $\mathbb{R}$-線形写像 $T : V \longrightarrow V$ のことを V 上の**線形変換**と呼ぶ。通常、線形変換に対しては、定義域の V と終域の V の基底 “$v_1,\cdots,v_n$” を同じものに選んだ行列表示を考える。V の基底 $\mathscr{B}=$ “$v_1,\cdots,v_n$” と同じ基底 $\mathscr{B}$ に関する行列表示を、単に、V の基底 $\mathscr{B}$ に関する行列表示と呼ぶ。

例 12 - 3 - 1 線形変換 $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$T(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}x+2y\\3x+4y\end{pmatrix}$$

で定義する。$\mathbb{R}^2$ の基底 “$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$” に関する T の行列表示 A を求めよう。

$$T(\mathbf{v}_1)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2,$$
$$T(\mathbf{v}_2)=\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}=2\mathbf{v}_1+5\mathbf{v}_2$$

であるから、$\mathbb{R}^2$ の基底 “$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$” に関する T の行列表示は $A=\begin{pmatrix}0&2\\1&5\end{pmatrix}$ である。 □

例 12 - 3 - 2 $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ を定数として、漸化式

$$a_{n+3}+c_1a_{n+2}+c_2a_{n+1}+c_3a_n=0 \qquad (n=1,2,\cdots) \tag{12 - 3 a}$$

を満たす実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体なすベクトル空間 $V=S(c_1,c_2,c_3;\mathbb{R})$ を考える ([例 11 - 5 - 3] を参照)。V 上の線形変換 $T : V \longrightarrow V$ を

$$T(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})=\{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$$

によって定義する。“$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$” を [例 11 - 5 - 3] のように定義される V の基底とする。この基底に関する T の行列表示は、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c_3 & -c_2 & -c_1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。 □

注意 12 - 3 - 3 線形写像 F の行列表示を得るには基底を指定しなければ決まらない。基底の選び方やその並べ方によっていろいろな行列表示が得られる。線形写像 F が与えられたとき、基底をうまく選んで、F のできるだけ簡単な行列表示を得ることが課題である。

● 12 - 4 : 標準基底に関する行列表示

ここでは、数ベクトル空間の間の線形写像に対して、標準基底に関する行列表示を求めよう。

定理 12 - 4 - 1

$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を線形写像とする。このとき、$\mathbb{R}^n$ の標準基底 “$\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$” と $\mathbb{R}^m$ の標準基底 “$\mathbf{e}'_1, \cdots, \mathbf{e}'_m$” に関する F 行列表示 A は、

(12 - 4 a) $$A = (F(\mathbf{e}_1) \ \cdots \ F(\mathbf{e}_n))$$

によって与えられる。また、F は A から定まる線形写像 T_A に一致する：$F = T_A$.

(証明)

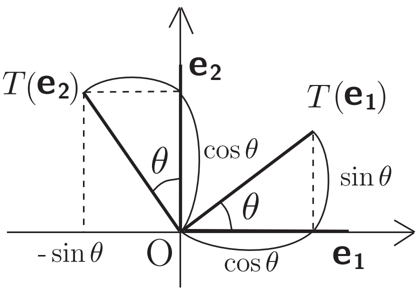
$A = (a_{ij})$ とおくと、各 $j = 1, \cdots, n$ について、

(12 - 4 b) $$F(\mathbf{e}_j) = a_{1j}\mathbf{e}'_1 + \cdots + a_{mj}\mathbf{e}'_m = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = (A \text{ の第 } j \text{ 列ベクトル})$$

となるから、$A = (F(\mathbf{e}_1) \ \cdots \ F(\mathbf{e}_n))$ を得る。このとき、[定理 7 - 7 - 1] より、$F = T_A$ となることがわかる。 □

例 12 - 4 - 2 (原点を中心とする回転移動)

写像 $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を、各点 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ を原点のまわりに反時計まわりに角度 θ だけ回転させた点に移すような回転移動とする。幾何学的考察により、T は線形写像であることがわかる。



$\mathbb{R}^2$ の標準基底 “$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$” に対して

(12 - 4 c) $$T(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \qquad T(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

となっていることがわかる (右上図参照)。したがって、[定理 12 - 4 - 1] により

(12 - 4 d) $$R_\theta = (T(\mathbf{e}_1) \ T(\mathbf{e}_2)) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とおくと $T = T_{R_\theta}$ となる、つまり、原点のまわりに反時計まわりに角度 θ だけ回転させる回転移動 T は次で与えられる：

$$T(\mathbf{x}) = R_\theta \mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2).$$ □

No.12 2024年12月12日

線形代数2事前練習用演習問題

pre12-1. (線形写像)

$\mathbb{R}$-線形写像 $F : V \longrightarrow U$ が全単射であるとき、逆写像 $F^{-1} : U \longrightarrow V$ もまた $\mathbb{R}$-線形写像であることを示せ。

pre12-2. (線形写像の行列表示)

$\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ を 2 次正方行列全体のなすベクトル空間とし、行列 A を $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ と定める。さらに、

$$T(X) = AX - XA \qquad (X \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}))$$

により定まる線形変換 $T : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ を考える。

(1) $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ の基底を一組与えよ。

(2) (1) の基底に関する T の行列表示を求めよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre12-1. (LM1) 任意の $u_1, u_2 \in U$ をとる。$v_1 = F^{-1}(u_1),\ v_2 = F^{-1}(u_2)$ とおくと、F は線形写像であるから、

$$F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2) = u_1 + u_2$$

が成り立つ。これは、$v_1 + v_2 = F^{-1}(u_1 + u_2)$ と書き換えることができる。この式から等式

$$F^{-1}(u_1) + F^{-1}(u_2) = v_1 + v_2 = F^{-1}(u_1 + u_2)$$

を得る。

(LM2) 任意に $u \in U$ と $t \in \mathbb{R}$ をとる。$v = F^{-1}(u)$ とおくと、F は線形写像であるから、

$$F(tv) = tF(v) = tu$$

が成り立つ。これは、$tv = F^{-1}(tu)$ と書き換えることができ、この式から等式

$$tF^{-1}(u) = tv = F^{-1}(tu)$$

を得る。

(LM1), (LM2) より、F^{-1} は線形写像である。

pre12-2. (1) 任意の 2 次正方行列 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は

$$X = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のように表わされる。したがって、

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、“$E_{11}, E_{12}E_{21}, E_{22}$” は $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ を張る。“$E_{11}, E_{12}E_{21}, E_{22}$” は一次独立であることが簡単に証明できるから、“$E_{11}, E_{12}E_{21}, E_{22}$” は $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ の一組の基底である。

(2)
$$\begin{aligned} T(E_{11}) &= AE_{11} - E_{11}A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0E_{11} - 2E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22} \end{aligned}$$

である。同様に計算すると、

$$\begin{aligned} T(E_{12}) &= 0E_{11} - 6E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22}, \\ T(E_{21}) &= 2E_{11} + 0E_{12} + 6E_{21} - 2E_{22}, \\ T(E_{22}) &= 0E_{11} + 2E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22} \end{aligned}$$

と表わされることがわかる。したがって、(1) で求めた $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ の基底 “$E_{11}, E_{12}E_{21}, E_{22}$” に関する T の行列表示は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

線形代数２・第 12 回 (2024 年 12 月 12 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数２・第 12 回学習内容チェックシート 2024 年 12 月 12 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. ベクトル空間 V から U への写像 $F : V \longrightarrow U$ が (ℝ-) 線形写像であるとは、どのような条件が成り立つときをいうか。その条件を下に書きなさい。

ベクトル空間 V 上の (ℝ-) 線形変換とは何か。定義を下に書きなさい。

Q2. $F : V \longrightarrow U$ をベクトル空間 V から U への ℝ-線形写像とする。次の $\boxed{}$ に適当な言葉、数字、数式、記号等を入れなさい。

- 線形写像 F は次の性質を持つ：

  ① $F(0_V) = \boxed{}$, ② 任意の $v \in V$ に対して $F(-v) = \boxed{}$.

- "$v_1, \cdots, v_n$" を V の基底とし、$v \in V$ を

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n \qquad (t_1, \cdots, t_n \in \mathbb{R})$$

  と表わすと、$F(v)$ は $F(v_1), \cdots, F(v_n)$ の一次結合により次のように表わされる：

$$F(v) = \boxed{}.$$

- V は "v_1, v_2" を基底として、U は "u_1, u_2, u_3" を基底として持っているとする。これらの基底に関する F の行列表示が $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ であるとき、$F(v_1), F(v_2)$ は u_1, u_2, u_3 の一次結合によってそれぞれ次のように表わされる：

$$F(v_1) = \boxed{}, \qquad F(v_2) = \boxed{}.$$

  これより、実数 s, t に対して $F(sv_1 + tv_2)$ は u_1, u_2, u_3 の一次結合によって次のように表わされる：

$$F(sv_1 + tv_2) = \boxed{}.$$

- $V = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^m$ のとき、$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$ となる行列 A が存在する。この A は $V = \mathbb{R}^n$ の $\boxed{}$ と $U = \mathbb{R}^m$ の $\boxed{}$ に関する F の行列表示に等しい。

Q3. V を 3 次元ベクトル空間とし、$F : V \longrightarrow V$ を ℝ-線形変換とする。V の基底 "v_1, v_2, v_3" に関する F の行列表示を求めるにはどのようにすればよいか？その方法を書きなさい。

Q4. 第 12 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。