

## §12. 2次曲線とその標準形

$a_1, \dots, a_n, b$  を実数の定数とする。 $\mathbb{R}^n$  において

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$$

を満たす点  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  の全体は、(空集合や  $\mathbb{R}^n$  全体になる場合もあるが) 一般に超平面 (= 適当な平行移動により、 $\mathbb{R}^n$  中の  $(n-1)$  次元部分空間になる部分集合) を表す。ここでは、 $a_{ij}$  ( $1 \leq i \leq j \leq n$ ),  $b_1, \dots, b_n, c$  を実数の定数として、

$$a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n + b_1x_1 + \dots + b_nx_n + c = 0$$

を満たす点  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  の全体が一般にどんな図形を表すのかを考察する。特に、 $n=2$  の場合に詳しく調べる。

### ● 12-1 : 2次曲線

$a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c \in \mathbb{R}$  を定数とし、 $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  は同時には0でないとする。 $\mathbb{R}^2$  において

$$(12-1 \text{ a}) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

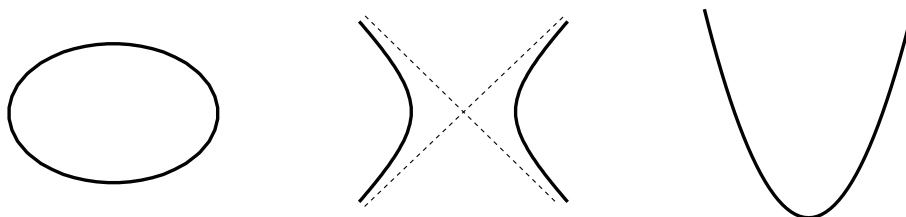
を満たす点  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  の全体のなす部分集合を **2次曲線** と呼ぶ (注:  $xy, x, y$  の係数が2倍の形をしているが、これは後の計算のためであり、本質的なことではない)。

2次曲線の代表例を以下に挙げる。

例 12-1-1  $a, b > 0, c \neq 0$  を定数とする。方程式

$$(1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3) y = cx^2$$

によって表わされる2次曲線はそれぞれ**楕円**、**双曲線**、**放物線**と呼ばれ、 $\mathbb{R}^2$  において下図のような図形を描く。



ある点に関して点対称な2次曲線は**有心**であると呼ばれ、そうでない2次曲線は**無心**であると呼ばれる。(1)の楕円と(2)の双曲線は原点に関して点対称な図形 ( $\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$  という変換に関して図形がかわらない) なので、有心2次曲線であり、(3)の放物線はそのような点は存在しないので、無心2次曲線である。

### ● 12-2 : 2次曲線の標準形

(12-1 a) は

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$(12-2 \text{ a}) \quad \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0$$

のように書き換えることができる。この方程式によって表わされる図形  $M$  とし、ある  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$  をとり、これを  $\mathbf{x}_0$  だけ平行移動させた図形を  $M'$  とおくと、 $M'$  は方程式

$$(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0)^T A (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0) + 2\mathbf{b}^T (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0) + c = 0$$

を満たす  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$  の全体のなす図形である。これを整理すると、

$$(12-2 \text{ b}) \quad \tilde{\mathbf{x}}^T A \tilde{\mathbf{x}} + 2(\mathbf{b}^T - \mathbf{x}_0^T A) \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_0^T A \mathbf{x}_0 - 2\mathbf{b}^T \mathbf{x}_0 + c = 0$$

となることがわかる(注:  $A$  は対称行列であるから、 $\tilde{\mathbf{x}}^T A \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^T A \tilde{\mathbf{x}}$  である)。ここで、1 次の係数が0になるような  $\mathbf{x}_0$  があるとき、すなわち、

$$A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$$

を満たす  $\mathbf{x}_0$  が存在するとき、そのような  $\mathbf{x}_0$  に対して (12-2 b) は次の簡単な方程式となる:

$$(12-2 \text{ c}) \quad \tilde{\mathbf{x}}^T A \tilde{\mathbf{x}} + d = 0 \quad (\text{但し、} d = -\mathbf{b}^T \mathbf{x}_0 + c).$$

(注:  $\mathbf{x}_0^T A \mathbf{x}_0 = \mathbf{b}^T \mathbf{x}_0$  であるから  $\mathbf{x}_0^T A \mathbf{x}_0 - 2\mathbf{b}^T \mathbf{x}_0 + c = -\mathbf{b}^T \mathbf{x}_0 + c$ ).  $A$  は対称行列であるから、回転行列により  $\mathbb{R}$  上対角化可能である。そこで、 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  を  $A$  の固有値とし、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad |P| = 1$$

を満たす直交行列  $P \in M_2(\mathbb{R})$  を1つとる(注:  $P$  はある  $\theta$  を用いて  $P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  の形をしている)。そして、

$$\mathbf{y} = P^{-1}\tilde{\mathbf{x}}$$

という変数変換を行うと、(12-2 c) は  $(P\mathbf{y})^T A (P\mathbf{y}) + d = 0$ , すなわち、

$$(12-2 \text{ d}) \quad \mathbf{y}^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + d = 0$$

と書き換えられる。つまり、 $M'$  は回転移動  $T_P^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  によって、(12-2 d) を満たす  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  の全体からなる図形  $M''$  に写される。 $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  とおくと、(12-2 d) は

$$(12-2 \text{ e}) \quad \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + d = 0$$

という等式になる。 $\lambda_1, \lambda_2, d$  が正、負、0 のいずれかによって場合分けの考察を行うと、 $M''$  がどんな図形なのかわかる。(楕円、双曲線、交わる2直線、空集合、1点集合などが現れる。詳しい考察は演習問題として残しておく。)  $M''$  は  $M$  から平行移動と回転移動を行って得られているから、 $M$  がどんな図形なのかもわかる。

ここまでの考察結果を命題としてまとめておこう。

#### 命題 12-2-1

$A \in M_2(\mathbb{R})$  を零でない対称行列、 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ ,  $c \in \mathbb{R}$  とし、 $M$  を

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0$$

を満たす  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  の全体が作る2次曲線とする。

$$A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$$

を満たす  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$  が存在するならば、 $M$  は平行移動と回転移動により、

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + d = 0$$

を満たす  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  の全体が作る 2 次曲線に変換される。ここで、 $\lambda_1, \lambda_2$  は  $A$  の固有値であり、 $d = -\mathbf{b}^T \mathbf{x}_0 + c$  である。

次に、(12-2 a) により与えられる 2 次曲線  $M$  に対して、 $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$  を満たす  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$  が存在しない場合を考察する。 $A$  が正則ならばこのような  $\mathbf{x}_0$  は存在するから、 $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$  を満たす  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$  が存在しないときには、 $|A| = 0$  でなければならない。よって、 $A$  の固有値  $\lambda_1, \lambda_2$  のうち少なくとも一方は 0 である。 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  ならば  $A = O$  (零行列) になってしまうから、 $\lambda_1, \lambda_2$  のうちどちらかは 0 で、残りは 0 でない。 $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$  と仮定しても一般性を失わないので、以下、この条件の下で考察を続ける。

今度は (12-2 a) に対して直ちに  $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$  という変数変換を行う。すると、(12-2 a) は

$$(12-2 f) \quad \mathbf{y}^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} + 2(P^T \mathbf{b})^T \mathbf{y} + c = 0$$

と書き換えられる。

$$\mathbf{b}' = P^T \mathbf{b}$$

とおき、 $\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix}$  とおくと、(12-2 f) は次の形になる：

$$(12-2 g) \quad \lambda_1 y_1^2 + 2(b'_1 y_1 + b'_2 y_2) + c = 0.$$

•  $b'_2 = 0$  の場合、上式は  $\lambda_1 y_1^2 + 2b'_1 y_1 + c = 0$  という 2 次方程式になる。この解が 2 点集合か、1 点集合か、空集合かのいずれかに応じて、(12-2 f) を満たす点  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  の集合は、平行 2 直線か、1 つの直線か、空集合かのいずれかになる。

•  $b'_2 \neq 0$  の場合、(12-2 g) を

$$\lambda_1 \left( y_1 + \frac{b'_1}{\lambda_1} \right)^2 + 2b'_2 y_2 + c - \frac{(b'_1)^2}{\lambda_1} = 0$$

と書き換える。そして、

$$z_1 = y_1 + \frac{b'_1}{\lambda_1}, \quad z_2 = y_2 + \frac{1}{2b'_2} \left( c - \frac{(b'_1)^2}{\lambda_1} \right)$$

という変数変換 (平行移動) を行う。すると、(12-2 g) は次のように表わされる：

$$(12-2 h) \quad \lambda_1 z_1^2 + 2b'_2 z_2 = 0.$$

よって、 $M$  は放物線であることがわかる。

得られた結果を命題としてまとめておこう。

### 命題 12-2-2

$A \in M_2(\mathbb{R})$  を零でない対称行列、 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ ,  $c \in \mathbb{R}$  とし、 $M$  を

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0$$

を満たす  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  の全体が作る 2 次曲線とする。 $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$  を満たす  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$  は存在しないとし、 $\lambda_1 (\neq 0), \lambda_2 = 0$  を  $A$  の固有値とする。 $P$  を

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad |P| = 1$$

を満たす直交行列  $P \in M_2(\mathbb{R})$  とし、 $\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix} = P^T \mathbf{b}$  とおく。

- (1)  $b'_2 = 0$  のとき、 $M$  は平行2直線か、1つの直線か、空集合かのいずれかである。  
 (2)  $b'_2 \neq 0$  のとき、 $M$  は回転移動と平行移動により、

$$\lambda_1 z_1^2 + 2b'_2 z_2 = 0$$

を満たす  $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  の全体が作る放物線に変換される。

以上の考察から、次の定理を得る。

### 定理 12-2-3

$A \in M_2(\mathbb{R})$  を零でない対称行列、 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ ,  $c \in \mathbb{R}$  とし、 $M$  を

$$(12-2 \text{ i}) \quad \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0$$

を満たす  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  の全体が作る2次曲線とする。 $\lambda_1 (\neq 0)$ ,  $\lambda_2$  を  $A$  の固有値とすると、 $M$  は回転移動と平行移動により、次のいずれかの方程式を満たす点  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  の全体のなす2次曲線に変換される：

$$(\text{Type1}) \quad \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + d = 0 \quad (d \text{ はある定数})$$

$$(\text{Type2}) \quad \lambda_1 y_1^2 + b'_2 y_2 = 0 \quad (b'_2 \text{ は } 0 \text{ でないある定数})$$

これらを2次曲線の標準形と呼ぶ。

### (証明)

[命題 12-2-2(1)] の場合のみ、標準形にできることが明示されていないので、ここで確かめておく。この場合には、 $\lambda_2 = 0$  であり、 $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$  という変数変換を行うと、(12-2 i) は  $\lambda_1 y_1^2 + 2b'_1 y_1 + c = 0$  という2次方程式になるのであった。これは

$$\lambda_1 \left( y_1 + \frac{b'_1}{\lambda_1} \right)^2 + c - \frac{(b'_1)^2}{\lambda_1} = 0$$

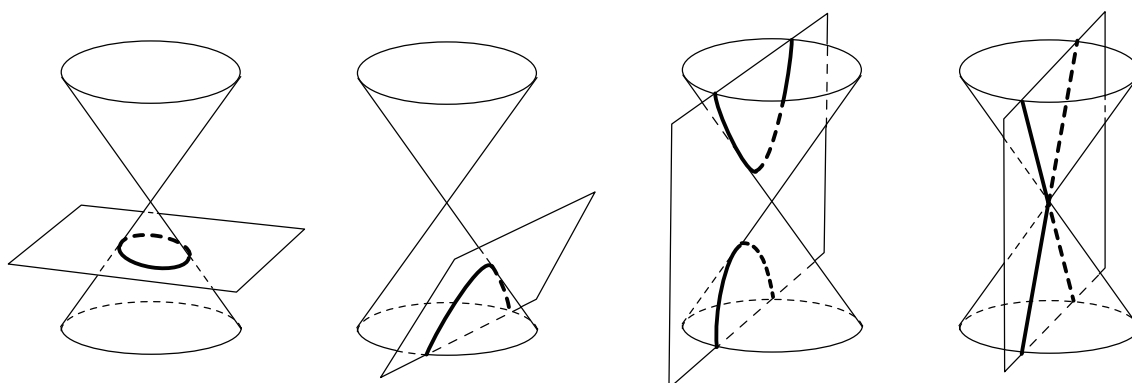
と書き換えられるから、

$$z_1 = y_1 + \frac{b'_1}{\lambda_1}, \quad z_2 = y_2$$

と変数変換(平行移動)を行い、 $d = c - \frac{(b'_1)^2}{\lambda_1}$  と定めれば、(Type1) の形にまとまる。□

**注意 1.** 標準形が (Type1) の場合、2次曲線は有心であり、(Type2) の場合、2次曲線は無心である。

**注意 2.** 楕円、双曲線、放物線、交わる2直線など、2次曲線は円錐を平面で切ったときの切り口に現れる。そのため、2次曲線は**円錐曲線**と呼ばれることもある。



## 線形代数 3 事前練習用演習問題

## pre12-1. 方程式

$$2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$$

によって与えられる 2 次曲線  $M$  の標準形を求めよ。さらに  $M$  の概形を  $(x, y)$ -座標平面上に描け。

## ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre12-1.  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$  とおくと、与えられた方程式は  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} + 8 = 0$  と書き換えることができる。 $A$  の固有値は  $\Delta_A(x) = (x+2)(x-3)$  より、 $-2, 3$  である。それぞれの固有値に属する  $\mathbb{R}$ -線形変換  $T_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  の固有空間は次のようになる：

$$W(-2, T_A) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \quad W(3, T_A) = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

そこで、各固有空間から大きさ 1 のベクトルとして  $\mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  を取り出し、 $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2)$  とおくと、 $P$  は  $|P| = 1$  を満たす直交行列（したがって、回転行列）であり、 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  となる。よって、

$$(*) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

によって変数変換を行うと、与えられた方程式は

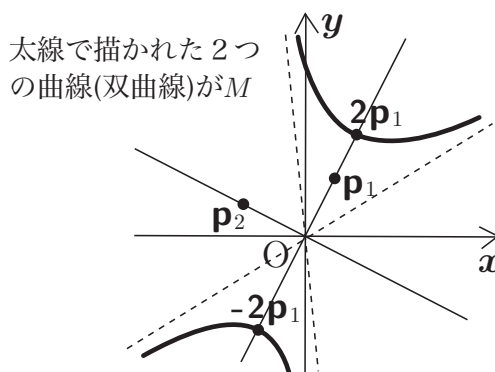
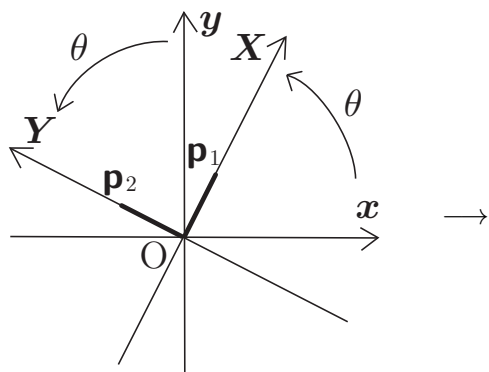
$$(X \ Y) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + 8 = 0$$

すなわち、

$$-2X^2 + 3Y^2 + 8 = 0$$

となる。これが  $M$  の標準形であり、 $(X, Y)$ -座標平面において頂点が  $(\pm 2, 0)$  で、 $Y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} X$  を漸近線に持つ双曲線を描く。

(\*) の右辺は  $X\mathbf{p}_1 + Y\mathbf{p}_2$  と表わすことができるから、 $(x, y)$ -座標平面上で  $X$ -軸、 $Y$ -軸はそれぞれ  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$  の方向である。つまり、 $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$  を満たす  $\theta \in [0, \pi]$  を考えると、 $(x, y)$ -座標軸を原点を中心に  $\theta$  回転させたものが  $(X, Y)$ -座標軸となる。



## 第 12 回 (2025 年 6 月 30 日) 演習問題事前練習シート

---

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

学籍番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

Q1.  $a, b, c$  を  $a, b > 0, c \neq 0$  を満たす実数とする。以下の各方程式によって表わされる2次曲線の名称を答え、概形を描け。

| 方程式 | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ | $y = cx^2$ |
|-----|-----------------------------------------|-----------------------------------------|------------|
| 名称  |                                         |                                         |            |
| 概形  |                                         |                                         |            |

Q2.  $A \in M_2(\mathbb{R})$  を零でない対称行列、 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2, c \in \mathbb{R}$  とし、 $M$  を

$$(*) \quad \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0$$

を満たす  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  の全体が作る2次曲線とする。 $\lambda_1 (\neq 0), \lambda_2$  を  $A$  の固有値とする。

(1)  $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$  を満たす  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$  が存在する場合を考える。

(Step 1) 適当な変数変換  $\mathbf{x} \mapsto \tilde{\mathbf{x}}$  を行くと、 $(*)$  は次の方程式に置き換わる：

$$(*1) \quad \tilde{\mathbf{x}}^T A \tilde{\mathbf{x}} + d = 0 \quad (d = -\mathbf{b}^T \mathbf{x}_0 + c).$$

どのような変数変換を行うとこのようにできるか。また、 $(*1)$  を満たす  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$  の全体が作る2次曲線を  $M'$  とおくと、 $M'$  は  $M$  にどのような移動を行うことにより得られるか。

[ $\mathbf{x}$  に行う変数変換]  $\tilde{\mathbf{x}} =$  \_\_\_\_\_ [ $M$  に行う移動] \_\_\_\_\_

(Step 2) 適当な正則行列  $P$  を用いて、変数変換  $\tilde{\mathbf{x}} \mapsto \mathbf{y} = P^{-1}\tilde{\mathbf{x}}$  を行くと、 $(*1)$  は

$$(*2) \quad \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + d = 0 \quad (\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix})$$

に置き換わる。どのような正則行列  $P$  を用いるとこのようにできるか。また、 $(*2)$  を満たす  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  の全体が作る2次曲線を  $M''$  とおくと、 $M''$  は  $M'$  にどのような移動を行うことにより得られるか。

[ $P$  の選び方] \_\_\_\_\_

[ $M'$  に行う移動] \_\_\_\_\_

(2)  $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$  を満たす  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$  が存在しない場合を考える。(1) の (Step 2) の正則行列  $P$  を用いて、変数変換  $\tilde{\mathbf{x}} \mapsto \mathbf{y} = P^{-1}\tilde{\mathbf{x}}$  を行い、 $P^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix}$  とおくと、

$$(*3) \quad \lambda_1 y_1^2 + 2(b'_1 y_1 + b'_2 y_2) + c = 0 \quad (\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix})$$

となる。この方程式を満たす  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  の全体が作る2次曲線を  $M^\natural$  とおく。 $b'_2 = 0$  と  $b'_2 \neq 0$  のそれぞれの場合に応じて、 $M'$  に適当な平行移動  $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$  を施すことにより、 $(*3)$  はどのような標準形に変換されるか。

[ $b'_2 = 0$  のとき] \_\_\_\_\_ [ $b'_2 \neq 0$  のとき] \_\_\_\_\_

Q3. 第12回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。