# §12. Frobeniusの定理とCayley-Hamiltonの定理

Frobeniusの定理は線形変換 $T$ の固有値や固有ベクトルがわかっているとき、$T$ の多項式で与えられる線形変換の固有値や固有ベクトルを求めるために使われる。Cayley-Hamilton の定理は、線形変換 $T$ の固有多項式 $\Delta_T(x)$ の不定元 $x$ に $x = T$ を代入して得られる $T$ に関する多項式が線形変換として常に 0 になるということを主張する定理である。この節では、これらの定理を証明し、その使い方を学ぶ。以下、$\mathbb{K}$ を体とする。

## ● 12-1：線形変換の多項式

$V$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし、$T : V \longrightarrow V$ を $\mathbb{K}$-線形変換とする。このとき、整数 $k \geq 0$ に対して $V$ 上の線形変換 $T^k : V \longrightarrow V$ を

(12-1 a)
$$T^k = \begin{cases} \mathrm{id}_V & (k=0) \\ \overbrace{T \circ \cdots \circ T}^{k\text{ 個}} & (k \geq 1) \end{cases}$$

によって定義する。$t \in \mathbb{K}$ と $\mathbb{K}$-線形変換 $T : V \longrightarrow V$ に対して、$\mathbb{K}$-線形変換 $tT : V \longrightarrow V$ が

(12-1 b)
$$(tT)(v) = tT(v) \qquad (v \in V)$$

によって定義され、2つの $\mathbb{K}$-線形変換 $S, T : V \longrightarrow V$ に対して、$\mathbb{K}$-線形変換 $S+T : V \longrightarrow V$ が

(12-1 c)
$$(S+T)(v) = S(v) + T(v) \qquad (v \in V)$$

によって定義される。すると、$x$ を不定元とする $\mathbb{K}$-係数の多項式

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m \qquad (n \geq 0,\ a_0, a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{K})$$

と $\mathbb{K}$-線形変換 $T : V \longrightarrow V$ に対して $V$ 上の線形変換 $f(T) : V \longrightarrow V$ が

(12-1 d)
$$f(T) = a_0\mathrm{id}_V + a_1T + \cdots + a_mT^m$$

によって定義される。2つの $\mathbb{K}$-係数の多項式

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_lx^l$$

に対して、$h(x) = f(x)g(x)$ とおく：

$$h(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + a_mb_lx^{m+l}.$$

このとき、

(12-1 e)
$$h(T) = f(T) \circ g(T)$$

が成り立つ。

上では線形変換を多項式に代入することを考えたが、同様にして、正方行列を多項式に代入することができる。つまり、$n$ 次正方行列 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ と $x$ を不定元とする $\mathbb{K}$-係数の多項式

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$$

に対して、$f(A)$ を

(12-1 f)
$$f(A) = a_0E_n + a_1A + \cdots + a_mA^m$$

と定める。2つの $\mathbb{K}$-係数の多項式 $f(x),\ g(x)$ に対して $h(x) = f(x)g(x)$ とおくと、

(12-1 g)
$$h(A) = f(A)g(A)$$

が成り立つ。

**例 12 - 1 - 1** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ と多項式 $f(x) = x^2 - 3x + 7$ に対して、

$$f(A) = A^2 - 3A + 7E_2 = \begin{pmatrix} -7 & -12 \\ 24 & 17 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

## ● 12 - 2 : Frobenius の定理

$A$ の固有値がわかれば、$A$ の多項式で与えられれる行列の固有値も次の定理によりわかる。

**定理 12 - 2 - 1 (Frobenius の定理)**

$V$ $(\neq \{0_V\})$ を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし、$T : V \longrightarrow V$ を $\mathbb{K}$-線形変換とする。また、$f(x) \in \mathbb{K}[x]$ とする。このとき、$T$ が三角化可能ならば $f(T)$ も三角化可能であって、$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を $T$ の固有値の全体とするとき、$f(T)$ の固有値の全体は $f(\alpha_1), \cdots, f(\alpha_n)$ で与えられる。

**(証明)**

$T$ は三角化可能なので、$V$ の基底 $\mathscr{B}$ を適当に選ぶと、$\mathscr{B}$ に関する $T$ の行列表示は

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ & \alpha_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & \text{\huge O} & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

の形となる。ここで、

$$\Delta_T(x) = |xE_n - A| = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)$$

であるから、$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ は $T$ の固有値の全体となる。

$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ $(a_0, a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{K})$ とおくと、同じ基底 $\mathscr{B}$ に関する $f(T) = a_0 \mathrm{id}_V + a_1 T + \cdots + a_m T^m$ の行列表示は $f(A) = a_0 E_n + a_1 A + \cdots + a_m A^m$ となるが、$i = 1, \cdots, m$ に対して

$$A^i = \begin{pmatrix} \alpha_1^i & * & \cdots & * \\ & \alpha_2^i & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & \text{\huge O} & & \alpha_n^i \end{pmatrix}$$

となるから、

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\alpha_1) & * & \cdots & * \\ & f(\alpha_2) & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & \text{\huge O} & & f(\alpha_n) \end{pmatrix}$$

となる。よって、

$$\Delta_{f(T)}(x) = |xE_n - f(A)| = (x - f(\alpha_1))(x - f(\alpha_2))\cdots(x - f(\alpha_n))$$

となり、$f(T)$ は三角化可能である。また、$f(T)$ のすべての固有値は $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \cdots, f(\alpha_n)$ によって与えられる。 □

上の定理の「行列版」は次のようになる。

**系 12 - 2 - 2 (Frobenius の定理)**
$n$ 次正方行列 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ が $\mathbb{K}$ 上三角化可能ならば、任意の多項式 $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ に対して $f(A)$ もまた $\mathbb{K}$ 上三角化可能であり、$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ が $A$ の固有値の全体のとき、$f(A)$ の固有値の全体は $f(\alpha_1), \cdots, f(\alpha_n)$ で与えられる。 □

**例 12 - 2 - 3** 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ の固有多項式は

$$\mathit{\Delta}_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)(x+2)(x-2)$$

である。よって、$A$ は $\mathbb{R}$ 上三角化可能であり、その固有値は $1, 2, -2$ である。Frobenius の定理より、実係数多項式 $f(x) = x^2 + 4$ に対して、

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^2 + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

の固有値は $f(1) = 5,\ f(2) = 8,\ f(-2) = 8$ で与えられる。 □

## ● 12 - 3 : Cayley-Hamilton の定理

Cayley-Hamilton の定理は固有値の理論における最も基本的な定理である。この定理なしには固有値に関する様々な結果を導くことは困難であろう。

**定理 12 - 3 - 1 (Cayley-Hamilton の定理)**
$V\ (\neq \{0_V\})$ を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間、$T : V \longrightarrow V$ を三角化可能な $\mathbb{K}$-線形変換とする。このとき、

(12 - 3 a) $$\mathit{\Delta}_T(T) = 0.$$

但し、上式の右辺の 0 は 零写像を表わす。

上の定理を $T = T_A$ ($A$ は $n$ 次正方行列) の場合に考えると、次の定理を得る。

**定理 12 - 3 - 2 (Cayley-Hamilton の定理)**
$\mathbb{K}$ 上三角化可能な正方行列 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ に対して

(12 - 3 b) $$\mathit{\Delta}_A(A) = \mathrm{O}.$$

**注意**. [定理 12 - 3 - 1] および [定理 12 - 3 - 2] において「三角化可能」という条件は外すことができる。しかし、この授業で用いる Cayley-Hamilton の定理は、上で述べた形で十分である。

**例 12 - 3 - 3** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、

$$\mathit{\Delta}_A(x) = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix} = (x-a)(x-d) - (-b)(-c) = x^2 - (a+d)x + (ad-bc)$$

であるから、Cayley-Hamilton の定理により、

(12 - 3 c) $$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E_2 = \mathrm{O}$$

が成り立つ。

**例 12-3-4** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対して、Cayley-Hamilton の定理により、

$$A^2 - 5A - 2E_2 = \mathrm{O}$$

が成り立つ。したがって、$A^2, A^3, A^4$ は

$$\begin{aligned} A^2 &= 5A + 2E_2, \\ A^3 &= (A+5E_2)(A^2-5A-2E_2) + 27A + 10E_2 = 27A + 10E_2, \\ A^4 &= (A^2+5A+27E_2)(A^2-5A-2E_2) + 145A + 54E_2 = 145A + 54E_2 \end{aligned}$$

のように $A$ の多項式で表わされる ($A$ を代入すれば、具体的に成分で書くこともできる)。また、$A(A-5E_2) = 2E_2$ より、$A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A - 5E_2)$ である。

(**[定理 12-3-1] の証明**)

$n = \dim V$ とおくと、$T$ は三角化可能であるから、$V$ の基底 $\mathscr{B} = \text{“}v_1, \cdots, v_n\text{”}$ を適当にとると、$T$ の $\mathscr{B}$ に関する行列表示 $A$ は上三角行列になる。そこで、

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \alpha_2 & \cdots & a_{2n} \\ & \text{\Large O} & \ddots & \vdots \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$ とおくと、

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \alpha_1 v_1 \\ T(v_2) &= a_{12} v_1 + \alpha_2 v_2 \\ &\ \ \vdots \\ T(v_n) &= a_{1n} v_1 + \cdots + a_{n-1,n} v_{n-1} + \alpha_n v_n \end{aligned}$$

となる。したがって、各 $j$ に対して $\langle v_1, \cdots, v_j \rangle := \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \cdots, v_j\}$ と書くと、

$$\begin{aligned} &(T - \alpha_j \mathrm{id}_V)(v_j) = a_{1j} v_1 + \cdots + a_{j-1,j} v_{j-1} \quad \in \langle v_1, \cdots, v_{j-1} \rangle, \\ &(T - \alpha_j \mathrm{id}_V)(v_i) \in \langle v_1, \cdots, v_i \rangle \subset \langle v_1, \cdots, v_{j-1} \rangle \quad (i = 1, 2, \cdots, j-1) \end{aligned}$$

であるから

(12-3 d)
$$(T - \alpha_j \mathrm{id}_V)(\langle v_1, \cdots, v_j \rangle) \subset \langle v_1, \cdots, v_{j-1} \rangle$$

となる。これを $j = n, n-1, \cdots, 2, 1$ を代入して具体的に書くと、

$$\begin{aligned} (T - \alpha_n \mathrm{id}_V)(\langle v_1, \cdots, v_{n-1}, v_n \rangle) &\subset \langle v_1, \cdots, v_{n-1} \rangle, \\ (T - \alpha_{n-1} \mathrm{id}_V)(\langle v_1, \cdots, v_{n-1} \rangle) &\subset \langle v_1, \cdots, v_{n-2} \rangle, \\ &\ \ \vdots \\ (T - \alpha_2 \mathrm{id}_V)(\langle v_1, v_2 \rangle) &\subset \langle v_1 \rangle, \\ (T - \alpha_1 \mathrm{id}_V)(\langle v_1 \rangle) &= \{0\} \end{aligned}$$

となるから、

(12-3 e)
$$(T - \alpha_1 \mathrm{id}_V) \circ \cdots \circ (T - \alpha_{n-1} \mathrm{id}_V) \circ (T - \alpha_n \mathrm{id}_V) = 0$$

とわかる。$T$ は三角化可能であるから、$\varDelta_T(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n)$ のように因数分解されるので、(12-3 e) は、$\varDelta_T(T) = 0$ と書き換えられる。 □

No.12 2025年12月15日

# 線形代数4事前練習用演習問題

**pre12-1**. (1) 3次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の $\mathbb{C}$ における固有値と $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 $P \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ を1つ求めよ。

(2) 3次複素正方行列

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}$$

を $E_3, A, A^2$ の多項式で表わし、$B$ の $\mathbb{C}$ における固有値と $Q^{-1}BQ$ が対角行列となるような正則行列 $Q \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ を1つ求めよ。

## ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

---

**pre12-1**. (1) 計算により、$\Delta_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} = (x-1)(x^2+x+1)$ がわかる。

$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおくと、$\omega^2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\omega^3 = 1$ を満たし、$\Delta_A(x) = (x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)$ となる。したがって、$A$ の $\mathbb{C}$ における固有値は $1, \omega, \omega^2$ である。

$P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 $P$ を見つけるため、各固有値 $\alpha$ について、その固有値に属する固有空間 $W(\alpha)$ を求める。連立一次方程式 $(\alpha E_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の複素数解を求めることにより、$W(\alpha)$ は以下のように与えられることがわかる。

$$W(1) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad W(\omega) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} \right\}, \quad W(\omega^2) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix} \right\}.$$

条件を満たす $P$ は各固有空間から基底をとり、並べて作ることができる。そこで、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$$

とおく。$P$ は正則であり、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

となることがわかる。

(2) $B = a_1E_3 + a_2A + a_3A^2$ と表わされる。(1) で求めた正則行列 $P$ について、$P^{-1}A^2P =$

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \omega^2 & 0\\ 0 & 0 & \omega\end{pmatrix}$ であるから、

$$\begin{aligned}
P^{-1}BP &= a_1P^{-1}E_3P + a_2P^{-1}AP^{-1} + a_3P^{-1}A^2P\\
&= a_1\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \omega & 0\\ 0 & 0 & \omega^2\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \omega^2 & 0\\ 0 & 0 & \omega\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}a_1+a_2+a_3 & 0 & 0\\ 0 & a_1+a_2\omega+a_3\omega^2 & 0\\ 0 & 0 & a_1+a_2\omega^2+a_3\omega\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる。

**線形代数 4・第 12 回 (2025 年 12 月 15 日) 演習問題事前練習シート**

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

**線形代数４・第 12 回学習内容チェックシート** 2025 年 12 月 15 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. $V$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし、$S, T$ を $V$ 上の 2 つの $\mathbb{K}$-線形変換とする。

(1) (i) $T^0$ はどのような写像か。＿＿＿＿＿＿＿＿

(ii) 整数 $k \geq 1$ に対して、$T^k$ はどのような写像か。＿＿＿＿＿＿＿＿

(2) $S+T$ はどのような写像か。＿＿＿＿＿＿＿＿

(3) $t \in \mathbb{K}$ に対して、$tT$ はどのような写像か。＿＿＿＿＿＿＿＿

Q2. $x$ を不定元とする多項式 $f(x) = -2 + 3x - 4x^2 \in \mathbb{C}[x]$ を考える。

(1) $n$ 次正方行列 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ に対して、$f(A) =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿ .

特に、$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ (但し、$i$ は虚数単位) のとき、$f(A) =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿ .

(2) $V$ を複素ベクトル空間とし、$T$ を $V$ 上の $\mathbb{C}$-線形変換とする。$V$ 上の $\mathbb{C}$-線形変換 $f(T)$ により、各 $v \in V$ はどのような $V$ の元に写されるか。$\mathrm{id}_V$ や $T^2$ を用いずに答えよ。

$\big(f(T)\big)(v) =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

Q3. (1) Frobenius の定理とはどのような定理か。行列版の内容を説明せよ。

＿＿＿＿＿＿＿＿

(2) $n$ 次正方行列 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}$ における相異なる固有値の全体が $0, 1, -1, i, -i$ であるとする。このとき、行列 $A^2 - 2E_n$ の相異なる固有値の全体は ＿＿＿＿＿＿＿＿ である。

Q4. (1) Cayley-Hamilton の定理とはどのような定理か。線形変換版の内容を説明せよ。

＿＿＿＿＿＿＿＿

(2) 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して Cayley-Hamilton の定理を適用すると、どのような等式の成立がわかるか。

＿＿＿＿＿＿＿＿

(3) $V$ $(\neq \{0_V\})$ を $\mathbb{K}$ 上 3 次元のベクトル空間とし、$T$ を $V$ 上の $\mathbb{K}$-線形変換とする。$T$ の固有多項式が $\mathit{\Delta}_T(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ $(b, c, d \in \mathbb{K})$ により与えられるものとする。

(i) Cayley-Hamilton の定理を適用して、どのような等式の成立がわかるか。

＿＿＿＿＿＿＿＿

(ii) $d^{-1} \neq 0$ のとき、逆写像 $T^{-1}$ は $T$ のどのような多項式として表わすことができるか。

＿＿＿＿＿＿＿＿

Q5. 第 12 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。