§12. 部分積分と置換積分

微積分学の基本定理を使って、積の微分公式を書き換えると部分積分法が得られ、合成関数の微分公式を書き換えると置換積分法が得られる。この 2 つの積分法により、積分を実際に計算できる関数は飛躍的に増える。ここでは、部分積分法と置換積分法の導出過程を示し、その使い方を学ぶ。

● 12 - 1 : 不定積分

$f(x)$ を $[a,b]$ 上で定義された (連続とは限らない) 積分可能な関数とする。$[a,b]$ の中の 1 点 c を固定すると、$x \in [a,b]$ を与えるごとに積分

(12 - 1 a) $$F(x) = \int_c^x f(t)dt$$

が定まる。このように、積分区間の上端を変数に置き換えて得られる関数 $F(x)$ $(x \in [a,b])$ を $f(x)$ の**不定積分**という。不定積分を

(12 - 1 b) $$\int f(x)dx$$

のように表わす。不定積分には積分区間の下端の点 c の選び方の分だけ自由度があるが、別の点 $c' \in [a,b]$ を下端に固定したときとの違いは、

$$\int_{c'}^x f(t)dt = \int_{c'}^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt$$

により、定数の分しかない。

さらに、関数 $f(x)$ が連続ならば、微積分学の基本定理により、不定積分と原始関数は同一であり、$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると、不定積分は

(12 - 1 c) $$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (C \text{ は定数})$$

のように表わされる。C を**積分定数**と呼ぶ。

例 12 - 1 - 1 $(\mathrm{Tan}^{-1}(x))' = \dfrac{1}{x^2+1}$ $(x \in \mathbb{R})$ であるから、関数 $F(x) = \mathrm{Tan}^{-1}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ は関数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ $(x \in \mathbb{R})$ の原始関数である。したがって、

(12 - 1 d) $$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \mathrm{Tan}^{-1}(x) + C \qquad (C \text{ は積分定数}).$$

● 12 - 2 : 部分積分法

$f(x),\ g(x)$ を開区間 I 上で定義された微分可能な関数とすると、積の微分公式により、

(12 - 2 a) $$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

が成り立つ。$f'(x),\ g'(x)$ が連続なとき、上の関数は積分可能である。そこで両辺を積分すると、

$$\int (f(x)g(x))'dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

となるが、微積分学の基本定理により、左辺は $f(x)g(x) + C$ に等しい。ここで、$f(x)$ を $F(x)$, $f'(x)$ を $f(x)$ とおき直すと、$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数であって、

$$F(x)g(x) + C = \int f(x)g(x)dx + \int F(x)g'(x)dx$$

となる。したがって、次の公式を得る。

定理 12 - 2 - 1 (部分積分法)
$f(x)$, $g(x)$ を開区間 I 上で定義された関数とし、$f(x)$ は連続、$g(x)$ は微分可能で、その導関数 $g'(x)$ は連続であるとする。$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると、任意の $a, b \in I$ に対して、次の公式が成り立つ：

(12 - 2 b)
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

例 12 - 2 - 2 $a \neq 0$ を定数とする。このとき、

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{ax}dx &= \int_0^1 x\Big(\frac{1}{a}e^{ax}\Big)'dx = \Big[x\frac{1}{a}e^{ax}\Big]_0^1 - \int_0^1 (x)'\frac{1}{a}e^{ax}dx \\ &= \frac{1}{a}e^a - \frac{1}{a}\int_0^1 e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^a - \frac{1}{a}\Big[\frac{1}{a}e^{ax}\Big]_0^1 = e^a\Big(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}\Big) + \frac{1}{a^2}.\end{aligned}$$

● 12 - 3：置換積分法

$f(x)$, $\varphi(t)$ をそれぞれ開区間 I, J 上で定義された微分可能な関数であって、$\varphi(t)$ の値域が $f(x)$ の定義域 I に含まれているとすると、合成関数の微分法により、

(12 - 3 a)
$$(f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

が成り立つ。$f'(x)$, $\varphi'(t)$ が連続なとき、上の関数は積分可能である。両辺を積分すると、

$$\int (f \circ \varphi)'(t)dt = \int f'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

となるが、左辺は、微積分学の基本定理により $(f \circ \varphi)(t) + C$ に等しく、右辺はある $a \in J$ を固定して $\displaystyle\int_a^t f'(\varphi(T))\varphi'(T)\,dT$ に等しい：

$$(f \circ \varphi)(t) + C = \int_a^t f'(\varphi(T))\varphi'(T)\,dT.$$

ここで、$f(x)$ を $F(x)$, $f'(x)$ を $f(x)$ とおき直すと、$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数であり、上式は

(12 - 3 b)
$$F(\varphi(t)) + C = \int_a^t f(\varphi(T))\varphi'(T)\,dT$$

と書き換えられる。$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数であることから、$F(x)$ はある $p \in I$ を固定して、

(12 - 3 c)
$$F(x) = \int f(x)dx = \int_p^x f(X)dX$$

のように表わすことができる。(12 - 3 b) と (12 - 3 c) より、

(12 - 3 d)
$$\int_p^{\varphi(t)} f(X)dX + C = \int_a^t f(\varphi(T))\varphi'(T)\,dT$$

が得られる。$t = a$ を代入して $C = \displaystyle\int_{\varphi(a)}^p f(X)dX$ であることがわかるから、(12 - 3 d) の左辺は $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(t)} f(X)dX$ と書き換えられる。以上より、次の公式を得る。

定理 12 - 3 - 1 (置換積分法)

$f(x)$, $\varphi(t)$ をそれぞれ開区間 I, J 上で定義された関数とし、$f(x)$ は連続、$\varphi(t)$ は微分可能で、その導関数 $\varphi'(t)$ は連続であるとする。関数 $f(x)$ と関数 $\varphi(t)$ が合成可能であるとき、任意の $a, b \in J$ に対して、次の公式が成り立つ：

(12 - 3 e)
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

置換積分法を用いて $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx$ を計算するには、x を t の関数 $\varphi(t)$ $(t \in J)$ で表わして、$\alpha = \varphi(a)$ となる $a \in J$ と $\beta = \varphi(b)$ となる $b \in J$ を求めてから公式 (12 - 3 e) を適用することになる。しかし、実際の場面では、通常次の手順を踏むことが多い。

(i) $f(x)$ の式の一部分 (それを仮に $g(x)$ としよう) を文字 t で置き換える、つまり、$t = g(x)$ のようにおく。

(ii) 次に、x が α から β まで動くとき、t がどこからどこまで動くのかを調べる (仮に a から b まで動いたとしよう)。

(iii) 次に、$\frac{dt}{dx} = g'(x)$ を計算し、(積分区間 $[\alpha, \beta]$ を含むある開区間 I において $g'(x)$ が 0 の値を取らないことを確認し、) $f(x)\dfrac{1}{g'(x)}$ を t だけの式に書き換える。

(iv) (iii) で得られた t だけの「式」を a から b まで積分する。

注意：(iv) で得られた値が定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx$ の値に一致する。なぜなら、$g'(x) \neq 0$ なので、逆関数定理により、関数 $g(x)$ $(x \in I)$ は微分可能な逆関数を持つ。その逆関数が [定理 12 - 3 - 1] の $x = \varphi(t)$ であり、公式 (12 - 3 e) を適用できる。

例 12 - 3 - 2 定積分

$$\int_1^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$$

を求めよ。

解；

$t = x^2 - x + 1$ とおくと、

$$\frac{dt}{dx} = 2x - 1$$

x	1	$\to$	2
t	1	$\to$	3

である。これより、x が $[1, 2]$ を含む開区間 $I = (\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ の中を動くとき $\frac{dt}{dx} > 0$ となるので、この開区間 I において、x を t の関数 $\varphi(t)$ で表わすことができる。

したがって、

$$\int_1^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx = \int_1^3 \frac{2\varphi(t)-1}{t}\frac{1}{2\varphi(t)-1}dt = \int_1^3 \frac{1}{t}dt = [\log t]_1^3 = \log 3.$$

一般に、$f(x)$ が開区間 I 上で定義された微分可能な関数であって、任意の $x \in I$ に対して $f(x) \neq 0$ ならば、

(12 - 3 f)
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

が成り立つ。

● **12 - 4 : 部分積分法の応用**

n を自然数、$a>0$ として、

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$$

とおく。$n>1$ に対して、

$$\begin{aligned}
a^2 I_n &= \int \frac{a^2}{(x^2+a^2)^n}dx = \int \frac{(x^2+a^2)-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx \\
&= \int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}dx - \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}dx \\
&= I_{n-1} - \int x\left(-\frac{1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}\right)' dx \\
&= I_{n-1} + x\frac{1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} - \int \frac{1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}dx \\
&= I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1} \\
&= \frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}
\end{aligned}$$

となる。したがって、

(12 - 4 a) $$I_n = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{x}{(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}\right\} \qquad (n>1)$$

が成り立つ。また、$n=1$ のときは、

(12 - 4 b) $$I_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{(\frac{x}{a})^2+1}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{a}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

となる ($t=\frac{x}{a}$ とおいて置換積分法を適用した)。但し、C は積分定数である。

例えば、$a=\sqrt{2},\ n=2$ のとき、

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+2)^2}dx &= \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4}I_1 \\
&= \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C \qquad (C \text{ は積分定数})
\end{aligned}$$

と計算される。

2026 年 6 月 25 日

数学を学ぶ（微分積分 1）第 12 回・学習内容チェックシート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. $f(x)$ を $[a,b]$ 上で定義された積分可能な関数とします。

(1) 関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)dx$ とは何ですか。下の枠内に定義を述べなさい。

(2) 関数 $f(x)$ が連続なとき、不定積分 $\int f(x)dx$ はどのようにして求めることができますか？

Q2. $f(x),\ g(x)$ を開区間 I 上で定義された関数とし、$f(x)$ は連続、$g(x)$ は微分可能で、その導関数 $g'(x)$ は連続であるとします。

(1) 部分積分法を使って定積分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ の値を求めるには、$f(x)$ の何がわかって、かつ、どんな関数の定積分がわかればよいですか？必要な情報を下の枠内に書きなさい。

(2) 部分積分法を使って定積分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ の値を求めるための公式を下の枠内に書きなさい。

(3) 上の公式は何に対してどんなことをすると導くことができますか。簡単に説明しなさい。

Q3. $f(x)$ を開区間 I 上で定義された連続関数とします。

(1) 置換積分法を使って定積分 $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ の値を求めるには、変数 x をある微分可能な関数 $\varphi(t)$ $(t \in J)$ を用いて、$x = \varphi(t)$ と表わす必要があります。さらに、どんな実数 $a, b \in J$ とどんな関数の定積分がわかる必要がありますか？必要となる情報を下の枠内に書きなさい。

(2) 置換積分法を使って定積分 $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ の値を求めるための公式を下の枠内に書きなさい。

(3) 上の公式は何に対してどんなことをすると導くことができますか。簡単に説明しなさい。

Q4. 第 12 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。