§12. 一次変換と重積分

一般の有界閉集合上での重積分を計算するには、変数変換を行い、領域を「縦線領域や横線領域に直してから」計算することが必要になる。ここでは、変数変換の中で最も基本的な一次変換のみを考え、重積分の変数変換公式を導く。そのために、一次変換で写す前後で、領域の面積がどの程度変化するのかを観察する。

一次変換の定義とその性質を述べることから始めよう。

● 12 - 1 : 一次変換とは

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ を定数とすると、各 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $(ax + by, cx + dy) \in \mathbb{R}^2$ を対応させる写像

(12 - 1 a) $$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad F(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

が定まる。この写像を**一次変換**という。2 次正方行列 A を

(12 - 1 b) $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

によって定め、$\mathbb{R}^2$ の元を列ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で書くことにすれば、(12 - 1 a) の一次変換 F は

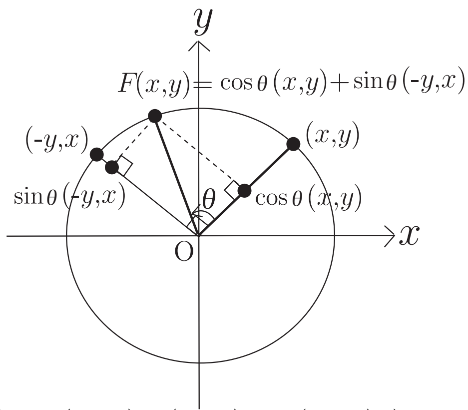
(12 - 1 c) $$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で与えられる。したがって、一次変換は行列によって定まる写像であると言える。

例 12 - 1 - 1　一次変換

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$
$$F(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y, \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)$$

は原点を中心とし、反時計回りに $\frac{\pi}{4}$ $(= 45°)$ だけ回転する移動を表わす。より一般に、$\theta \in \mathbb{R}$ とするとき、一次変換



(12 - 1 d) $$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad F(x, y) = ((\cos\theta)x - (\sin\theta)y, (\sin\theta)x + (\cos\theta)y)$$

は原点を中心とし、反時計回りに θ だけ回転する移動を表わす。

● 12 - 2 : 一次変換の性質

$\mathbb{R}^2$ の 2 点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ に対して、座標が $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ により与えられる点を $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ で表わし、$t \in \mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ の点 $\mathrm{A}(x, y)$ に対して、座標が (tx, ty) により与えられる点を $t\mathrm{A}$ で表わす：

(12 - 2 a) $$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

(12 - 2 b) $$t(x, y) = (tx, ty).$$

このとき、一次変換 F は次の性質を持つ：任意の $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}^2$ と任意の $s, t \in \mathbb{R}$ に対して、

(12 - 2 c) $$F(s\mathrm{A} + t\mathrm{B}) = sF(\mathrm{A}) + tF(\mathrm{B}).$$

性質 (12 - 2 c) を**線形性**と呼ぶ。

線形性の幾何学的意味を考えよう。平面 $\mathbb{R}^2$ 上に相異なる 2 点 $\mathrm{A}(x_1, y_1), \mathrm{B}(x_2, y_2)$ をとる。このとき、 A, B を端点とする線分 $\overline{\mathrm{AB}}$ 上の点は

(12 - 2 d) $$t\mathrm{A} + (1-t)\mathrm{B} \qquad (t \in [0,1])$$

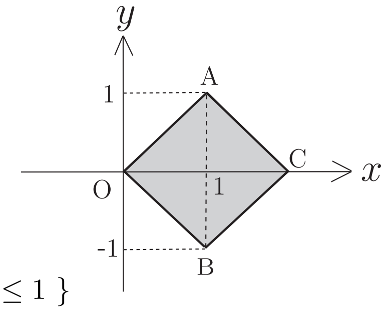
と表わされる。このとき、線形性 (12 - 2 c) により、

(12 - 2 e) $$F(t\mathrm{A} + (1-t)\mathrm{B}) = tF(\mathrm{A}) + (1-t)F(\mathrm{B})$$

が成り立つ。したがって、F は、線分 $\overline{\mathrm{AB}}$ を $1-t : t$ に内分する点を線分 $\overline{F(\mathrm{A})F(\mathrm{B})}$ を $1-t : t$ に内分する点に写すことがわかる (但し、$F(\mathrm{A}) \neq F(\mathrm{B})$ を仮定している)。以上の考察から、大雑把に言って、一次変換 F は線分の内分比を保つような写像である、と言える。

F を一次変換とし、D を $\mathbb{R}^2$ 内の部分集合 (すなわち、図形) とする。このとき、(x, y) が D 内を自由に動き回るときに、$F(x, y)$ が動き回る $\mathbb{R}^2$ の中の範囲のことを F による D の**像**といい、$F(D)$ という記号で表わす：

(12 - 2 f) $$F(D) = \{\ F(x, y) \mid (x, y) \in D\ \}.$$



例 12 - 2 - 1 右図で与えられる図形 D（平行四辺形の内部とその周）の、行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ が定める一次変換

(12 - 2 g) $$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad F(x, y) = (x + 2y, -x - y)$$

による像は

(12 - 2 h) $$F(D) = \{\ s(3, -2) + t(-1, 0) \mid 0 \leq s, t \leq 1\ \}$$

となる。これは、4 点 $\mathrm{O}, \mathrm{A}'(3, -2), \mathrm{B}'(-1, 0), \mathrm{C}'(2, -2)$ を頂点とする平行四辺形の内部および周を表わす。 □

● 12 - 3 : 行列式と平行四辺形の面積

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

(12 - 3 a) $$\det A = ad - bc$$

を A の**行列式**という。

[例 12 - 2 - 1] と同様にして、$\det A \neq 0$ のとき、A が定める一次変換 F は任意の平行四辺形を平行四辺形に写すことがわかる。

以下、2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $\det A \neq 0$ を満たしていると仮定する。すると、一次変換

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad F(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

によって、長方形領域 $R = [0, 1] \times [0, 1]$ は $\mathrm{O}(0, 0), \mathrm{A}(a, c), \mathrm{B}(b, d), \mathrm{C}(a + b, c + d)$ を頂点とする平行四辺形の内部とその周

$$D = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = u(a, c) + v(b, d),\ 0 \leq u, v \leq 1\ \}.$$

に写される。このとき、D の面積 $\mu(D)$ は行列式 $\det A$ の絶対値に等しい：

(12 - 3 b) $$\mu(D) = |ad - bc|.$$

一般に、一次変換 F による平行四辺形 R の像 $F(R)$ は平行四辺形となるが、2 つの平行四辺形 R と $F(R)$ の面積について、

(12 - 3 c) $$\mu\big(F(R)\big) = |\det A| \times \mu(R)$$

が成り立つことがわかる。このことは、一次変換 F によって平行四辺形の面積が $|\det A|$ 倍に拡大・縮小されることを意味する。

● 12 - 4：一次変換と重積分

D を 4 点 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(a,c), \mathrm{B}(b,d), \mathrm{C}(a+b,c+d)$ を頂点とする平行四辺形の内部とその周からなる有界閉集合とする：

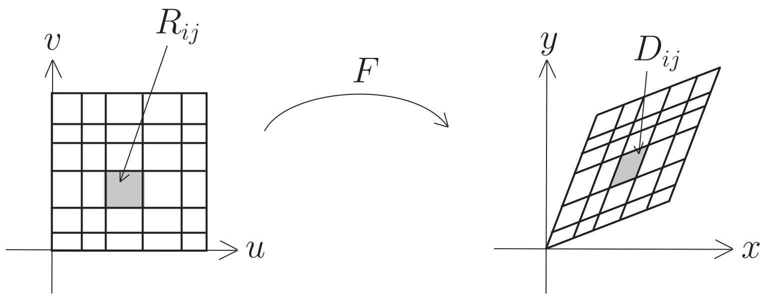
$$D = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) = u(a,c) + v(b,d),\ 0 \leq u, v \leq 1\ \}.$$

$\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $\varphi(u,v),\ \psi(u,v)$ を

(12 - 4 a) $$\begin{cases} \varphi(u,v) = au + bv \\ \psi(u,v) = cu + dv \end{cases}$$

によって定義する。このとき、$(u,v) \in \mathbb{R}^2$ に対して $(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \in \mathbb{R}^2$ を対応させる一次変換 $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ が考えられる。F は長方形領域 $R = [0,1] \times [0,1]$ を D に写し、連続 (すなわち、$\varphi,\ \psi$ は連続) である。

$f(x,y)$ を定義域に D を含む連続関数とする。



座標軸に平行な直線によって R を小長方形領域 R_{ij} に分割し、その像 $D_{ij} = F(R_{ij})$ によって D を分割する。R_{ij} たちによる R の分割を Δ とおき、D_{ij} たちによる D の分割を $F(\Delta)$ とおく。x-軸、y-軸に平行な直線は、F によって、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に平行な直線と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に平行な直線に写るので、$F(\Delta)$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に平行な直線と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に平行な直線による分割である (したがって、座標軸に平行とは限らないことに注意)。“リーマン和”の定義をまねて、各 D_{ij} から 1 点 $\xi_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$ をとって、

(12 - 4 b) $$S(f; F(\Delta), \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i,j} f(x_{ij}, y_{ij}) \mu(D_{ij})$$

を考える。$|F(\Delta)|$ を分割 $\{D_{ij}\}$ を構成する平行四辺形の辺の長さのうち最大のものを表わすことにすると、$|\Delta| \to 0$ のとき $|F(\Delta)| \to 0$ となるので、重積分の定義と同様にして、

$$\lim_{|\Delta| \to 0} S(f; F(\Delta), \boldsymbol{\xi}) = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i,j} f(x_{ij}, y_{ij}) \mu(D_{ij}) = \int_D f(x,y)\, dxdy$$

となることがわかる。一方、$(x_{ij}, y_{ij}) = F(u_{ij}, v_{ij})$ とおくと、

$$(x_{ij}, y_{ij}) = F(u_{ij}, v_{ij}) = (au_{ij} + bv_{ij}, cu_{ij} + dv_{ij})$$

と表わされ、また、等式 (12 - 3 c) が成り立つことから、

$$S(f; F(\Delta), \xi) = \sum_{i,j} f(au_{ij} + bv_{ij}, cu_{ij} + dv_{ij})|ad - bc|\mu(R_{ij})$$

と書ける。よって、

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S(f; F(\Delta), \boldsymbol{\xi}) = \int_R f(au + bv,\ cu + dv)|ad - bc|\, dudv$$

とも書ける。以上より、次の等式が得られた：

(12 - 4 c)
$$\int_D f(x, y)\, dxdy = \int_R f(au + bv,\ cu + dv)|ad - bc|\, dudv$$

例 12 - 4 - 1　$D = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x + 2y \le 1,\ 0 \le -x + 3y \le 1\ \}$ とするとき、重積分

$$\int_D (x + y)\, dxdy$$

の値を求めよう。

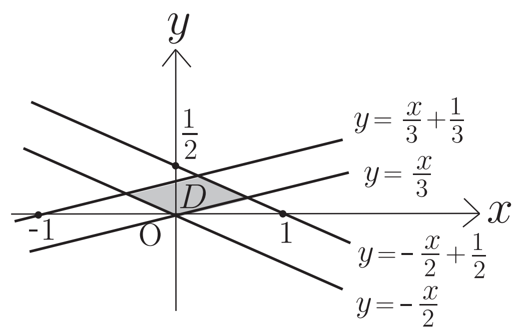
$R = [0, 1] \times [0, 1]$ とおき、$F(R) = D$ となる一次変換 F を見つける。これは

$$\begin{cases} u = x + 2y \\ v = -x + 3y \end{cases}$$

とおいて、これを x, y について解くことにより求められる。計算して、

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$
$$F(u, v) = \left(\frac{3}{5}u - \frac{2}{5}v,\ \frac{1}{5}u + \frac{1}{5}v\right)$$

であることがわかる。したがって、



$$\begin{aligned}\int_D (x + y)\, dxdy &= \int_R \Big(\big(\frac{3}{5}u - \frac{2}{5}v\big) + \big(\frac{1}{5}u + \frac{1}{5}v\big)\Big) \cdot \Big|\frac{3}{5}\frac{1}{5} - \Big(-\frac{2}{5}\Big)\frac{1}{5}\Big|\, dudv \\ &= \frac{1}{25}\int_0^1 \Big(\int_0^1 (4u - v)\, du\Big) dv = \cdots = \frac{3}{50}.\end{aligned}$$

2025 年 12 月 10 日

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎２）第 12 回・学習内容チェックシート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
一次変換とは？	p.	
2 次正方行列 A の行列式 $\det A$ とは？	p.	
$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D の一次変換 F による像 $F(D)$ とは？	p.	

Q2. p, q, r, s を $ps - qr \neq 0$ であるような実数として、平行四辺形

$$D = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq px + qy \leq 1,\ 0 \leq rx + sy \leq 1\ \}$$

を考えます。次の表を完成させなさい。

	解決方法・方針
長方形領域 $R = [0,1] \times [0,1]$ の像が D に一致するような一次変換 F を求めるには？	
D 上で定義された連続関数 $f(x, y)$ の重積分 $\int_D f(x, y)dxdy$ を計算するには？	

Q3. 次の $\boxed{}$ に適当な言葉や数字を入れなさい。

- 一次変換 F は線形性と呼ばれる次の性質を持つ：
  任意の A, B $\in \mathbb{R}^2$ と任意の $s, t \in \mathbb{R}$ に対して、$\boxed{}$.
- 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が与えられると、$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $F(x, y) = \boxed{} \in \mathbb{R}^2$ を対応させる一次変換 F が定まる。もし、$\det A \neq 0$ であれば、この一次変換 F は長方形領域 $[0,1] \times [0,1]$ を 4 点 $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$ を頂点とする平行四辺形 D に写す。D の面積 $\mu(D)$ は $\boxed{}$ に等しい。

Q4. 第 12 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。