§13. 不定積分の計算方法

この節では、高校の数学 III で学ぶ不定積分の計算方法、特に、部分積分法と置換積分法の計算方法を復習する。ここでは、原始関数と不定積分を区別せずに扱うが、本来は異なる概念である。

● 13 - 1 : 原始関数

開区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ の**原始関数**とは、I 上で定義された微分可能な関数 $F(x)$ であって、$F'(x) = f(x)$ を満たすもののことをいう。

<u>例 13 - 1 - 1</u> 自然数 n に対して $\left(\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = x^n$ であるから、関数 $F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ $(x \in \mathbb{R})$ は関数 $f(x) = x^n$ $(x \in \mathbb{R})$ の原始関数である。また、C を勝手な実数とするとき、

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C\right)' = x^n$$

であるから、関数 $F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ $(x \in \mathbb{R})$ も関数 $f(x) = x^n$ $(x \in \mathbb{R})$ の原始関数である。

上の例で見たように、関数 $f(x)$ の原始関数は 1 つではない。しかしながら、2 つの原始関数の差は定数の違いしかない。すなわち、

(13 - 1 a) $F_1(x), F_2(x)$ が共に $f(x)$ の原始関数ならば、差 $F_1(x) - F_2(x)$ は定数関数である。

$\because$)

関数 $F(x) := F_1(x) - F_2(x)$ を微分すると、

$$F'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

となる。ラグランジュの平均値の定理から、開区間 I 上で $F(x)$ は定数関数である、すなわち、$F(x)$ の値はある 1 点 $a \in I$ における値に等しい：$F(x) = F(a)$ $(x \in I)$. □

● 13 - 2 : 不定積分

開区間 I 上で定義された連続関数 $f(x)$ の原始関数を 1 つに特定せずに扱いたいとき

(13 - 2 a)
$$\int f(x)dx$$

のように表わし、連続関数 $f(x)$ $(x \in I)$ の**不定積分**と呼ぶ。$F(x)$ $(x \in I)$ を $f(x)$ の原始関数の 1 つとすると、

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

と表わすことができる。ここで、C は**積分定数**と呼ばれ、任意の実定数を表わす。

<u>例 13 - 2 - 1</u> (1) [例 13 - 1 - 1] より、任意の自然数 n に対して

(13 - 2 b)
$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad (C \text{ は積分定数}).$$

(2) $(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ であるから、

(13 - 2 c)
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad (C \text{ は積分定数}),$$

(13 - 2 d)
$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

であり、$(e^x)' = e^x x\ (x \in \mathbb{R})$, $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}\ (x \neq 0)$ であるから、

(13 - 2 e) $$\int e^x\, dx = e^x + C \qquad (C\ \text{は積分定数}),$$

(13 - 2 f) $$\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + C \qquad (C\ \text{は積分定数})$$

である。

(3) $(\mathrm{Tan}^{-1}(x))' = \dfrac{1}{x^2+1}\ (x \in \mathbb{R})$ であるから、関数 $F(x) = \mathrm{Tan}^{-1}(x)\ (x \in \mathbb{R})$ は関数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}\ (x \in \mathbb{R})$ の原始関数である。したがって、

(13 - 2 g) $$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \mathrm{Tan}^{-1}(x) + C \qquad (C\ \text{は積分定数}).$$

● 13 - 3 : 不定積分の性質

連続関数の不定積分は線形性と呼ばれる性質を持つ。

定理 13 - 3 - 1

$f(x), g(x)$ を開区間 I 上で定義された連続関数とする。このとき、

(i) $\displaystyle\int \big(f(x) + g(x)\big) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$

(ii) 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して、$\displaystyle\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx.$

● 13 - 4 : 部分積分法

$f(x)$, $g(x)$ を開区間 I 上で定義された微分可能な関数とすると、積の微分公式により、

(13 - 4 a) $$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

が成り立つ。$f'(x)$, $g'(x)$ が連続なとき、上の関数は積分可能である。そこで両辺を積分すると、

$$\int (f(x)g(x))' dx = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx$$

となる。左辺は不定積分の記号の定義より $f(x)g(x) + C$ (C は積分定数) に等しい。ここで、$f(x)$ を $F(x)$, $f'(x)$ を $f(x)$ とおき直すと、$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数であって、

$$F(x)g(x) + C = \int f(x)g(x) dx + \int F(x)g'(x) dx$$

となる。したがって、次の公式を得る (積分定数は不定積分に組み込まれるため、書く必要はない)。

定理 13 - 4 - 1 (部分積分法（不定積分版）)

$f(x)$, $g(x)$ を開区間 I 上で定義された関数とし、I 上で $f(x)$ は連続、$g(x)$ は微分可能で、その導関数 $g'(x)$ は連続であるとする。$F(x)\ (x \in I)$ を関数 $f(x)\ (x \in I)$ の原始関数とすると、次の公式が成り立つ：

(13 - 4 b) $$\int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx.$$

例 13 - 4 - 2 $a \neq 0$ を定数とする。このとき、

$$\begin{aligned}\int x e^{ax} dx &= \int x \Big(\frac{1}{a} e^{ax}\Big)' dx = x \frac{1}{a} e^{ax} - \int (x)' \frac{1}{a} e^{ax} dx \\ &= \frac{1}{a} x e^{ax} - \frac{1}{a} \int e^{ax} dx = \Big(\frac{1}{a} x - \frac{1}{a^2}\Big) e^{ax} + C \quad (C\ \text{は積分定数}).\end{aligned}$$

例 13 - 4 - 3

$$\int x\sin x\,dx = \int x(-\cos x)'\,dx = x(-\cos x) - \int (x)'(-\cos x)\,dx$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

注意：次のようにしても上記の不定積分を求めることができる。積の微分法より、

$$(x\sin x)' = \sin x + x\cos x, \quad (x\cos x)' = \cos x - x\sin x$$

であるから、両辺を積分して次の 2 つの等式を得る (C_1, C_2 は積分定数)：

$$x\sin x + C_1 = \int \sin x\,dx + \int x\cos x\,dx = -\cos x + \int x\cos x\,dx,$$
$$x\cos x + C_2 = \int \cos x\,dx - \int x\sin x\,dx = \sin x - \int x\sin x\,dx.$$

後者の等式から [例 13 - 4 - 3] の不定積分が求められる。

● 13 - 5 : 置換積分法

$f(x)$, $\varphi(t)$ をそれぞれ開区間 I, J 上で定義された微分可能な関数であって、関数 $f(x)$ と関数 $\varphi(t)$ は合成可能である、すなわち、$\varphi(t)$ の値域が $f(x)$ の定義域 I に含まれているとする。合成関数の微分法により、

(13 - 5 a) $$(f\circ\varphi)'(t) = f'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

が成り立つ。$f'(x)$, $\varphi'(t)$ が連続なとき、上の関数は積分可能である。両辺を積分すると、

$$\int (f\circ\varphi)'(t)dt = \int f'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

となる。左辺は、定積分の記号の定め方より $(f\circ\varphi)(t) + C_1$ (C_1 は積分定数) に等しいから、

$$(f\circ\varphi)(t) + C_1 = \int f'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \qquad (C_1 \text{ は積分定数})$$

を得る。ここで、$f(x)$ を $F(x)$, $f'(x)$ を $f(x)$ とおき直すと、$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数であり、上式は

(13 - 5 b) $$F(\varphi(t)) + C_1 = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

と書き換えられる。$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数であることから、

(13 - 5 c) $$F(x) = \int f(x)dx + C_2 \qquad (C_2 \text{ は定数})$$

のように表わすことができる。(13 - 5 b) と (13 - 5 c) より、

(13 - 5 d) $$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

が得られる。以上より、次の公式を得る。

定理 13 - 5 - 1 (置換積分法（不定積分版）)

$f(x)$, $\varphi(t)$ をそれぞれ開区間 I, J 上で定義された関数とし、$f(x)$ は連続、$\varphi(t)$ は微分可能で、その導関数 $\varphi'(t)$ は連続であるとする。関数 $f(x)$ と関数 $\varphi(t)$ が合成可能であるとき、次の公式が成り立つ：

(13 - 5 e) $$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (\text{但し、} x = \varphi(t)).$$

例 13-5-2 開区間 I 上で定義された連続関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つが $F(x)$ $(x \in I)$ であるとする。このとき、実数の定数 a $(\neq 0), b$ に対して合成関数 $g(x) = f(ax+b)$ $(x \in I)$ の原始関数の 1 つは $\dfrac{1}{a}F(ax+b)$ により与えられる。したがって、

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \qquad (C \text{ は積分定数}).$$

例えば、

$$\int \sqrt{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}(3x+2)^{\frac{3}{2}} + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

である $\left(\because \displaystyle\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \ \ (C \text{ は積分定数})\right)$。

置換積分法を用いて $\displaystyle\int f(x)dx$ を計算するには、x を t の関数 $\varphi(t)$ $(t \in J)$ で表わして、公式 (13-5 e) を適用することになる。しかし、実際の場面では、通常次の手順を踏むことが多い。

(i) $f(x)$ の式の一部分 (それを仮に $g(x)$ としよう) を文字 t で置き換える、つまり、$t = g(x)$ のようにおく。

(ii) 次に、$\dfrac{dt}{dx} = g'(x)$ を計算し、($f(x)$ の定義域 I において $g'(x)$ が 0 の値を取らないことを確認し、) $f(x)\dfrac{1}{g'(x)}$ を t だけの式に書き換える。

(iii) (ii) で得られた t だけの「式」を積分する。

注意：(iii) の不定積分は $\displaystyle\int f(x)dx$ に積分定数の差を除いて一致する。なぜなら、$g'(x) \neq 0$ なので、逆関数定理により、関数 $g(x)$ $(x \in I)$ は微分可能な逆関数を持つ。その逆関数が [定理 13-5-1] の $x = \varphi(t)$ であり、公式 (13-5 e) を適用できる。

例 13-5-3 不定積分

$$\int \frac{\log x}{x}dx$$

を求めよ。

解；

$t = \log x$ とおくと、

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

である。これより、開区間 $I = (0, \infty)$ において $\frac{dt}{dx} > 0$ となるので、逆関数定理により、x を t の微分可能な関数 $\varphi(t)$ で表わすことができる。したがって、

$$\int \frac{\log x}{x}dx = \int \frac{t}{\varphi(t)} \cdot \varphi(t)\,dt = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C \qquad (C \text{ は積分定数}). \quad \square$$

例 13-5-4 一般に、$f(x)$ が開区間 I 上で定義された微分可能な関数であって、任意の $x \in I$ に対して $f(x) \neq 0$ ならば、

(13-5 f)
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

が成り立つ。

例えば、

$$\int \frac{3x}{x^2+1}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(x^2+1)'}{x^2+1}dx = \frac{3}{2}\log(x^2+1) + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

のように計算することができる。