§13. 数列の発散

ここでは、数列の収束の定義と実数の連続性に基づいて、$|a|<1$ のとき $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ となることを導出する。そのために、数列が $+\infty$ に発散するという概念を学ぶ。

● 13-1：数列が収束しないとは

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するとは、次が成立するときをいう：

(13-1 a) $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ n > N\ \Rightarrow\ |a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

(どんな $\varepsilon > 0$ に対しても、適当に $N \in \mathbb{N}$ を選ぶと、$n > N$ を満たすすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が満たされる。)

命題 (13-1 a) の否定を言い換えよう。そのために、$\exists N \in \mathbb{N}$ 以降の部分を $P(\alpha, \varepsilon)$ とおく：

$$P(\alpha,\varepsilon):\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ n > N\ \Rightarrow\ |a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

すると、(13-1 a) は「$\forall \varepsilon > 0,\ P(\alpha,\varepsilon)$」と表わされるから、その否定は「$\exists \varepsilon > 0\ \text{ s.t. }\ \overline{P(\alpha,\varepsilon)}$」となる。

今度は、$\overline{P(\alpha,\varepsilon)}$ の部分を書き換える。(13-1 a) の $n > N$ 以降の部分を $Q(\alpha,\varepsilon,N)$ とおく：

$$Q(\alpha,\varepsilon,N):\ n > N\ \Rightarrow\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

すると、$P(\alpha,\varepsilon)$ は「$\exists N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ Q(\alpha,\varepsilon,N)$」と表わされる。したがって、$\overline{P(\alpha,\varepsilon)}$ は「$\forall N \in \mathbb{N},\ \overline{Q(\alpha,\varepsilon,N)}$」と書き換えられる。

$Q(\alpha,\varepsilon,N)$ は「n が N よりも大きい (自然数) ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ である」、言い換えると、「N よりも大きな (すべての自然数) n に対して、$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ である」ということを意味している。したがって、その否定は「N よりも大きな (すべての自然数) n の中に、$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ を満たさないものがある」となる。つまり、「$\exists n \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ n > N,\ |a_n - \alpha| \geq \varepsilon$」と書き換えることができる。以上より、命題 (13-1 a) の否定は次のようになることがわかる。

(13-1 b) $$\exists \varepsilon > 0\ \text{ s.t. }\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ n > N,\ |a_n - \alpha| \geq \varepsilon.$$

これを文章で表現すれば、「適当に正の数 ε をとると、どんな自然数 N に対しても、$n > N$ かつ $|a_n - \alpha| \geq \varepsilon$ を満たす自然数 n が存在する」のようになる。

例 13-1-1 数列 $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しない。

解；

$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ とおく。

任意に $\alpha \in \mathbb{R}$ をとる。$\varepsilon = |\alpha| + \frac{1}{2}$ とする。任意に $N \in \mathbb{N}$ をとる。

• $\alpha \geq 0$ のとき $n = 2N+1$ とおくと、$n > N$ であり、

$$|a_n - \alpha| = \left|-1 + \frac{1}{2N+1} - \alpha\right| = 1 - \frac{1}{2N+1} + \alpha \geq \alpha + \frac{1}{2} = \varepsilon$$

となる。

• $\alpha < 0$ のとき $n = 2N$ とおくと、$n > N$ であり、

$$|a_n - \alpha| = \left|1 + \frac{1}{2N} - \alpha\right| = 1 + \frac{1}{2N} - \alpha \geq -\alpha + \frac{1}{2} = \varepsilon$$

となる。

いずれにしても (13-1 b) が成り立つので、数列 $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は α に収束しない。任意の実数に収束しないので、数列 $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しない。 □

● 13-2：正の無限大に発散する数列

収束しない数列は**発散**すると呼ばれる。ここでは、特に、正の無限大に発散する数列について考察する。

定義 13-2-1

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**正の無限大 (+∞) に発散する** (diverge to positive infinity) とは、どのような実数 $K > 0$ に対しても、次の条件 (13-2 a) を満たす自然数 N が存在するときをいう。

(13-2 a) $n > N$ を満たすすべての自然数 n について、$a_n > K$ である。

これを次のように書き表わす：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{または} \quad a_n \to +\infty \quad (n \to \infty).$$

注意. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $+\infty$ に発散することを、論理記号を使って次のように表現する：

$$\forall K > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ n > N \ \Rightarrow \ a_n > K.$$

補題 13-2-2

(1) $a > 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$.

(2) $|a| < 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

(3) $|a| < 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} na^n = 0$.

(**証明**)

(1) $a > 1$ だから、$a = 1 + h$ $(h > 0)$ と書くことができる。このとき、すべての自然数 n に対して $a^n > nh$ が成り立つ (二項定理あるいは数学的帰納法による)。これを踏まえてを示す。

任意に $K > 0$ をとる。アルキメデスの公理より、$Nh > K$ となる $N \in \mathbb{N}$ が存在する。このとき、$n > N$ を満たすすべての自然数 n について $a^n > nh > Nh > K$ となる。よって、$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$ である。

(2) $a = 0$ のときには自明に成り立つから、$a \neq 0$ の場合に示す。この場合、(1) を $\frac{1}{|a|}$ に適用し、"$\varepsilon - N$ 式" の表現を使って書き換えればよい。詳細は演習問題として残す。

(3) $a = 0$ のときには自明に成り立つから、$a \neq 0$ とする。$\frac{1}{|a|} > 1$ より、$\frac{1}{|a|} = 1 + h$ $(h > 0)$ とおくことができる。$n \geq 2$ のとき、

$$\left(\frac{1}{|a|}\right)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} h^2$$

となることがわかる (二項定理あるいは数学的帰納法による)。よって、

$$|na^n| = n|a|^n \leq n \cdot \frac{2}{n(n-1)h^2} = \frac{2}{(n-1)h^2}$$

を得る。$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} = 0$ であるから、$\lim_{n\to\infty} na^n = 0$ がわかる。 □

演習 13-1 $a = 1 + h$ $(h > 0)$ のとき、すべての自然数 n に対して $a^n > nh$ が成り立つことを証明せよ。

演習 13-2* a を $0 < |a| < 1$ を満たす実数とする。$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a|} = +\infty$ を $\varepsilon - N$ 式" の表現で書き換えることにより、$\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ を導け。

演習 13-3 a を $0 < |a| < 1$ を満たす実数とし、$\frac{1}{|a|} = 1 + h$ $(h > 0)$ とおく。このとき、2 以上のすべての自然数 n に対して $\left(\frac{1}{|a|}\right)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} h^2$ が成り立つことを証明せよ。

例 13-2-3 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{4\cdot 5^n+3^n}$ は存在し、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{4\cdot 5^n+3^n}=\frac{1}{4}$.

解；

$n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\frac{5^n-2^n}{4\cdot 5^n+3^n}=\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{4+\left(\frac{3}{5}\right)^n}$$

と書き換えることができ、$\left|\frac{2}{5}\right|<1,\ \left|\frac{3}{5}\right|<1$ であるから、数列 $\left\{\frac{2}{5}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{\frac{3}{5}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する。したがって、$\left\{\dfrac{5^n-2^n}{4\cdot 5^n+3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ も収束し、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{4\cdot 5^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{4+\left(\frac{3}{5}\right)^n}=\frac{1-0}{4+0}=\frac{1}{4}$$

である。 □

[補題 13-2-2] の証明と同じ発想で次が証明される。

例 13-2-4 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

(証明)

$n\geq 2$ のとき $\sqrt[n]{n}>1$ であるから、$\sqrt[n]{n}=1+h_n\ (h_n>0)$ とおくことができる。このとき、$n\geq\dfrac{n(n-1)h_n^2}{2}$ であるから、$h_n^2\leq\dfrac{2}{n-1}$ となる。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-1}=0$ であるから、$\{h_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}h_n^2=0$ となる。よって、任意の $\varepsilon>0$ に対して、

$$\exists\, N\in\mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ n>N\ \Rightarrow\ h_n^2<\varepsilon^2$$

が成り立つ。これは

$$\exists\, N\in\mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ n>N\ \Rightarrow\ |h_n|<\varepsilon$$

に同値である。故に、$\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}h_n=0$ となる。したがってまた $\{\sqrt[n]{n}\}_{n=1}^{\infty}$ も収束し、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}(1+h_n)=1$ となる。 □

例 13-2-5 任意の実数 $a>0$ について、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ である。

(証明)

アルキメデスの公理により、

$$\exists\, N\in\mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ \frac{a}{N}<\frac{1}{2}$$

が成り立つ。このとき、$n>N$ を満たすすべての $n\in\mathbb{N}$ に対して、

$$0<\frac{a^n}{n!}=\frac{\overbrace{a\cdot a\ \cdots\ a}^{n-N+1}}{n\cdot(n-1)\cdots N}\,\frac{\overbrace{a\ \cdots\ a\cdot a}^{N-1}}{(N-1)\cdots 2\cdot 1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N+1}\frac{a^{N-1}}{(N-1)!}$$

となる。[補題 13-2-2(2)] により、

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N+1}\frac{a^{N-1}}{(N-1)!}=0$$

であるから、はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ が従う。 □

注意. この結果は 2 つの数列 $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{n!\}_{n=1}^{\infty}$ の $+\infty$ への発散の速さを比較したときに、階乗の方が冪乗よりも速く $+\infty$ に発散することを意味している。

● 13 - 3 : 無限級数とその収束

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、その各項を初項から順に $+$ という記号でつないで作られる形式和

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots\cdots$$

を **(無限) 級数** (infinite series) と呼び、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

と書き表わす。ここで、足し算の記号 $+$ あるいは和の記号 $\sum$ を使っているが、足し算を実行した結果を表わしているわけではないことに注意する。

例 13 - 3 - 1

(1) 級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ を**調和級数**という。

(2) 実数 a, r に対して、級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ を初項 a、公比 r の (無限) **等比級数**という。

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とする。各自然数 n に対して、実数 $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ を級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ の**第 n 部分和** (the nth partial sum) という。第 n 部分和を第 n 項とする数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するとき、級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ は**収束する** (converge) といい、$S := \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ を級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ の**和** (sum of the series) という。和 S も級数と同じ記号 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ で書き表わす。これにより、収束する級数について $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ は形式和と実数 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ の 2 つの意味を持つことになる。どちらの意味で使っているのかは、前後の文脈で判断する。

例 13 - 3 - 2 等比級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ は $|r| < 1$ のとき収束し、その和は $\dfrac{a}{1-r}$ となる。

(証明)

各自然数 n について、$S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} ar^{k-1}$ とおく。$r \neq 1$ ならば、$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ となる。この式と [補題 13 - 2 - 2] から、$|r| < 1$ のとき、$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束して、和は次のようになる：

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}. \qquad \square$$

級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ が**正項級数** (series with nonnegative terms) であるとは、すべての $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \geq 0$ であるときをいう。正項級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して、第 n 部分和からなる数列 $\Big\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\Big\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加列であるから、[定理 12-4-1] により正項級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するための必要十分条件は、数列 $\Big\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\Big\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界になることである。調和級数は収束しないが、次が成り立つ。

例 13 - 3 - 3 正項級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{16} + \cdots$ は収束する。

演習 13- 4 * 上の例を確かめよ。

ヒント. $n \geq 2$ に対して $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} < 1$ を示して、$\Big\{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\Big\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界であることを示す。

注意. 級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ の和は、実際には $\zeta(2) = \pi^2/6 = 1.644934066848226.....$ である。