§13. ベクトル空間の座標系

有限次元ベクトル空間 V に基底が与えられると、V に座標が 1 つ定まる。ここでは、その意味と意義を説明する。座標は抽象ベクトル空間と数ベクトル空間との間を繋ぐ「翻訳装置」の役割りを果たす。

● 13 - 1 : ベクトル空間の座標系

$V\ (\neq \{0_V\})$ を有限次元ベクトル空間とし、“$v_1, \cdots, v_n$” をその 1 組の基底とする。このとき、任意の $v \in V$ は

(13 - 1 a) $$v = t_1v_1 + \cdots + t_nv_n \qquad (t_1, \cdots, t_n \in \mathbb{R})$$

の形に一意的に表わされる。したがって、写像 $\Phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を

(13 - 1 b) $$\Phi(v) = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \qquad (\text{但し } v = t_1v_1 + \cdots + t_nv_n)$$

によって定義すると、これは全単射になる。写像 Φ を基底 “$v_1, \cdots, v_n$” から定まる V の**座標系**という。また、V の元 $v = t_1v_1 + \cdots + t_nv_n$ に対して、n 次元列ベクトル $\Phi(v) = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$ を “$v_1, \cdots, v_n$” に関する v の**座標ベクトル**と呼ぶ。

全単射 Φ は線形写像になっていることに注意しよう。

例 13 - 1 - 1 2 次以下の実数係数多項式全体のなすベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_2$ は

$$\mathscr{B} = \text{“}x^2 - x - 1,\ x - 1,\ 1\text{”}$$

を基底として持つ。多項式 $f(x) = a + bx + cx^2\ (a, b, c \in \mathbb{R})$ は

$$f(x) = c(x^2 - x - 1) + (b + c)(x - 1) + (a + b + 2c)$$

のように基底 $\mathscr{B}$ の一次結合で表わされることがわかる。したがって、$f(x)$ の基底 $\mathscr{B}$ に関する座標ベクトルは $\begin{pmatrix} c \\ b + c \\ a + b + 2c \end{pmatrix}$ である。すなわち、$\mathbb{R}[x]_2$ に基底 $\mathscr{B}$ が指定されている状況で、

$$\mathbb{R}[x]_2 \ni a + bx + cx^2 \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} c \\ b + c \\ a + b + 2c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

という対応関係が得られる。また、基底 $\mathscr{B}$ に関する座標ベクトルが $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ によって与えられる多項式 $g(x) \in \mathbb{R}[x]_2$ は、$g(x) = (x^2 - x - 1) + 2(x - 1) + 3 = x^2 + x$ である。 □

基底 (から定まる座標系 Φ) は、抽象的な世界 (ベクトル空間と線形写像の世界) と具体的な世界 (行列と基本変形の世界) を結びつける際に要となる重要な存在である。

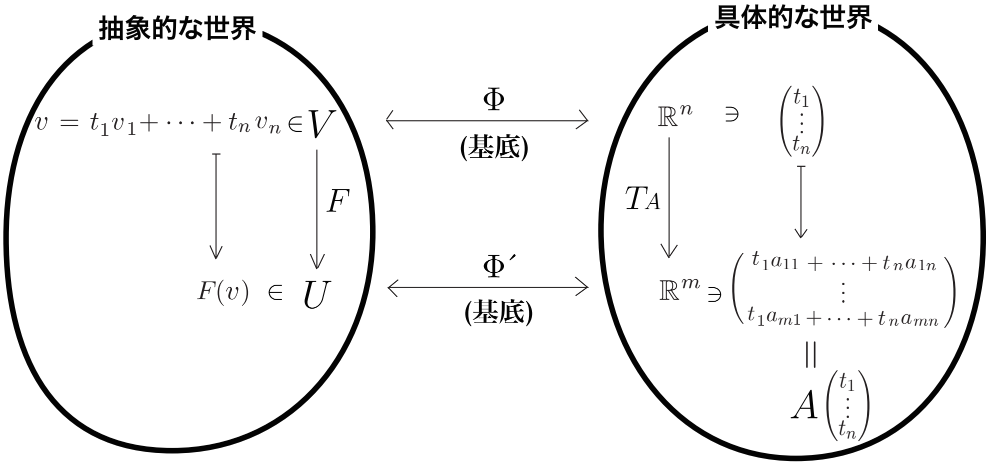
補題 13 - 1 - 2

$F : V \longrightarrow U$ を有限次元ベクトル空間の間の $\mathbb{R}$-線形写像とする。V の基底 “$v_1, \cdots, v_n$” と U の基底 “$u_1, \cdots, u_m$” に関する F の行列表示を A とおき、$\Phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を “$v_1, \cdots, v_n$” から定まる V の座標系、$\Phi' : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を “$u_1, \cdots, u_m$” から定まる U の座標系とする。

このとき、

(13 - 1 c) $$\Phi' \circ F \circ \Phi^{-1} = T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

が成り立つ、すなわち、次の対応関係が成り立つ：



(**証明**)

写像 $\Phi' \circ F \circ \Phi^{-1}$ と T_A のどちらも定義域は $\mathbb{R}^n$ であり、終域は $\mathbb{R}^m$ であり、等しい。さらに、任意の $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned}
(\Phi' \circ F \circ \Phi^{-1})(\mathbf{x}) &= (\Phi' \circ F)(t_1v_1 + \cdots + t_nv_n) \\
&= \Phi'(t_1F(v_1) + \cdots + t_nF(v_n)) \\
&= \Phi'(t_1(a_{11}u_1 + \cdots + a_{m1}u_m) + \cdots + t_n(a_{1n}u_1 + \cdots + a_{mn}u_m)) \\
&= \Phi'((t_1a_{11} + \cdots + t_na_{1n})u_1 + \cdots + (t_1a_{m1} + \cdots + t_na_{mn})u_m) \\
&= \begin{pmatrix} t_1a_{11} + \cdots + t_na_{1n} \\ \vdots \\ t_1a_{m1} + \cdots + t_na_{mn} \end{pmatrix} = A\mathbf{x}
\end{aligned}$$

となる。よって、写像として $\Phi' \circ F \circ \Phi^{-1} = T_A$ が成り立つ。 □

● 13 - 2 : 線形同型写像とその性質

全単射な線形写像は**線形同型写像**と呼ばれる。有限次元ベクトル空間 V に対して、その基底を 1 つ指定したときに定まる座標系 $\Phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}$-線形同型写像である。ここでは、その性質を調べる。

補題 13 - 2 - 1

V, U を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし、$F : V \longrightarrow U$ を線形同型写像とする。このとき、F の逆写像 $F^{-1} : U \longrightarrow V$ も線形写像である。

上の補題は事前練習用演習問題 **pre12-1** と同じ内容であるから、証明は省略する。

補題 13 - 2 - 2

V, U を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間、$F : V \longrightarrow U$ を線形同型写像とし、W を V の部分空間とする。このとき、$F(W) = \{\ F(w) \mid w \in W\ \}$ は U の部分空間であり、“$w_1, \cdots, w_d$” が W の基底ならば、“$F(w_1), \cdots, F(w_d)$” は $F(W)$ の基底である。

(証明)

$F(W)$ が U の部分空間であることは演習問題として残す。後半の主張を示す。

- “$F(w_1), \cdots, F(w_d)$” が一次独立であること：

$$t_1F(w_1) + \cdots + t_dF(w_d) = 0_U \quad (t_1, \cdots, t_d \in \mathbb{R})$$

とおく。F の線形性と $0_U = F(0_V)$ より、上の等式は

$$F(t_1w_1 + \cdots + t_dw_d) = F(0_V)$$

と書き換えられる。F は単射であるから $t_1w_1 + \cdots + t_dw_d = 0_V$ が導かれ、“$w_1, \cdots, w_d$” は一次独立であるから $t_1 = \cdots = t_d = 0$ となる。故に、“$F(w_1), \cdots, F(w_d)$” は一次独立である。

- “$F(w_1), \cdots, F(w_d)$” が $F(W)$ を張ること：

任意に $u \in F(W)$ をとると、$u = F(w)$ $(w \in W)$ と書ける。“$w_1, \cdots, w_d$” は W を張るから、

$$w = t_1w_1 + \cdots + t_dw_d \qquad (t_1, \cdots, t_d \in \mathbb{R})$$

と書ける。この両辺に F を作用させて

$$u = F(t_1w_1 + \cdots + t_dw_d) = t_1F(w_1) + \cdots + t_dF(w_d)$$

を得る。故に、“$F(w_1), \cdots, F(w_d)$” は $F(W)$ を張る。以上より、“$F(w_1), \cdots, F(w_d)$” は $F(W)$ の基底である。 □

● 13-3：部分空間の基底の求め方

有限次元ベクトル空間 V の基底があらかじめ分かっているとき、その部分空間の基底を求めるのに、[補題 13-2-2] を利用することができる。

例 13-3-1 $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ の部分空間 $W = \{\ A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}\, A = 0\ \}$ を考える。W の基底を 1 組求めよう。$\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ の基底 “$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$” から定まる座標系を $\Phi : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$ とする。この座標系の下で、$\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ の部分空間 W は $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W' = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ \middle|\ a + d = 0 \right\}$$

に対応する。W' が “$\mathbf{w}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$” を基底に持つことは、連立一次方程式の解空間の基底の議論からすぐにわかる。線形同型写像の下で基底は基底に写されるから、これらを座標系 Φ を使って $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ の元に「翻訳」しなおすことにより、W の基底 “$E_{11} - E_{22}, E_{12}, E_{21}$” が見つかる。 □

例 13-3-2 実数列全体のなすベクトル空間 $\mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ において、3 つの実数列

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2^n + 2\cdot 3^n + 5^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2^{n+1} + 3^{n+1} + 7\cdot 5^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2^n - 5^n\}_{n=1}^{\infty}$

によって張られる部分空間を W とおく。W の基底を 1 組求めよう。

$\boldsymbol{e}_1 = \{2^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{e}_2 = \{3^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{e}_3 = \{5^n\}_{n=1}^{\infty}$ によって張られる $\mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ の部分空間 V を考える。"$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$" は一次独立なので、これらは V の基底である。今、$\Phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を "$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$" から定まる座標系とすると、Φ の下で $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ はそれぞれ

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

に対応し、W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W' = \{\ s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} + u\boldsymbol{c} \mid s, t, u \in \mathbb{R}\ \}$$

に対応する。行列 $A = (\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})$ を考えると、$W' = \mathrm{Im}\, T_A$ となる。これを利用すると、$\dim W' = \dim(\mathrm{Im}\, T_A) = \mathrm{rank}\, A = 2$ であり、$W' = \mathrm{Im}\, T_A$ の一組の基底として "$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$" が見つかる。よって、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は W の一組の基底をなす。さらに、連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解いて、関係式 $3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ が得られる。したがって、$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ は次のように表わされる：

$$\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = -3\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + 2\{b_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

□

● 13 - 4 : [定理 11 - 5 - 1] の証明

第 11 節において、有限次元ベクトル空間において、基底を構成するベクトルの個数は、基底の選び方によらずに、一定であるという定理を証明なしで述べた [定理 11 - 5 - 1]。ここで、この定理の証明を与えよう。

定理 13 - 4 - 1
V $(\neq \{0_V\})$ を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とする。このとき、V の基底を構成するベクトルの個数は、基底に依らずに、一定である。

(**証明**)

$\mathscr{B} =$ '$v_1, \cdots, v_n$" および $\mathscr{B}' =$ "$v_1', \cdots, v_m'$" を V の 2 つの基底とする。$\Phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を基底 $\mathscr{B}$ から定まる V の座標系とし、$\Phi' : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を基底 $\mathscr{B}'$ から定まる U の座標系とする。このとき、合成写像

$$F = \Phi' \circ \Phi^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

を考える。F は線形同型写像の合成として、線形同型写像である。数ベクトル空間の間の線形写像に対する次元公式 [定理 9 - 5 - 1] を F に適用して、

$$n = \dim(\mathrm{Ker}\, F) + \dim(\mathrm{Im}\, F)$$

を得る。ここで、F は単射であるから、$\mathrm{Ker}\, F = \{\mathbf{0}\}$ である。よって、$\dim(\mathrm{Ker}\, F) = 0$ である。一方、F は全射であるから、$\mathrm{Im}\, F = \mathbb{R}^m$ である。よって、$\dim(\mathrm{Im}\, F) = m$ である。こうして、$n = m$ であることが示された。 □

上の定理により、数ベクトル空間の部分空間に対してだけではなく、有限次元ベクトル空間 V に対しても、空間の「大きさ」を表わす「次元」と呼ばれる量

(13 - 4 a) $$\dim V = (V \text{ の基底を構成するベクトルの個数})$$

が定まることがわかった。

線形代数 2 事前練習用演習問題

pre13-1. (座標ベクトル)

3 次以下の実係数多項式のなすベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_3$ は

$$\mathscr{B} = \text{“}f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x + 1,\ f_2(x) = (x + 1)^2,\ f_3(x) = (x + 1)^3\text{”}$$

を基底として持つ。このことを既知として以下の問いに答えよ。

(1) 基底 $\mathscr{B}$ に関する座標ベクトルが $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる多項式 $f(x) \in \mathbb{R}[x]_3$ を求めよ。

(2) 多項式 $1 + 2x + x^3 \in \mathbb{R}[x]_3$ の基底 $\mathscr{B}$ に関する座標ベクトルを求めよ。

pre13-2. (部分空間の基底)

関数 $v_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, 2)$ を

$$v_0(x) = 1, \qquad v_1(x) = e^x, \qquad v_2(x) = e^{2x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義する。“v_0, v_1, v_2” は一次独立であることを既知として、次式で定義される 5 つの関数 $f_i \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ によって張られる部分空間 W の次元と一組の基底を求めよ：各 $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
&f_1(x) = 1 - 3e^x + 2e^{2x}, \qquad f_2(x) = -3 + 9e^x - 6e^{2x}, \\
&f_3(x) = -1 + 3e^x - 5e^{2x}, \quad f_4(x) = -2 + 6e^x - 4e^{2x}, \\
&f_5(x) = 1 - 3e^x + 9e^{2x}.
\end{aligned}$$

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre13-1. (1) 座標ベクトルの定義より、

$$\begin{aligned}
f(x) &= 4f_0(x) - 3f_1(x) - 2f_2(x) + f_3(x) \\
&= -4x + x^2 + x^3
\end{aligned}$$

である。

(2) $g(x) = 1 + 2x + x^3$ とおくと、$g(x)$ は基底 $\mathscr{B}$ の一次結合として次のように表わされる：

$$\begin{aligned}
g(x) &= (x + 1)^3 - 3x^2 - x \\
&= (x + 1)^3 - 3(x + 1)^2 + 5x + 3 \\
&= (x + 1)^3 - 3(x + 1)^2 + 5(x + 1) - 2.
\end{aligned}$$

したがって、$\mathbb{R}[x]_3$ の基底 $\mathscr{B} = \text{“}f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x+1,\ f_2(x) = (x+1)^2,\ f_3(x) = (x+1)^3\text{”}$ に関する $g(x)$ の座標ベクトルは $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

pre13-2. “v_0, v_1, v_2” は一次独立であるから、$V = \mathrm{Span}\{v_0, v_1, v_2\}$ とおくと、“v_0, v_1, v_2” は V の基底をなす。また、$W = \mathrm{Span}\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ は V の部分空間である。

$\Phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を "v_0, v_1, v_2" に関する座標系とすると、

$$\Phi(f_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \Phi(f_2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix},\ \Phi(f_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix},\ \Phi(f_4) = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix},\ \Phi(f_5) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

となり、$\Phi(W) = \mathrm{Span}\{\Phi(f_1), \Phi(f_2), \Phi(f_3), \Phi(f_4), \Phi(f_5)\}$ が成り立つ。そこで、$\Phi(W)$ の次元と一組の基底を求める。そのために、行列 A を

$$A = (\Phi(f_1)\ \Phi(f_2)\ \Phi(f_3)\ \Phi(f_4)\ \Phi(f_5))$$

により定める。ガウスの消去法に基づいて A を行基本変形していくと、階段行列

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が得られる。これより、

$$\dim \Phi(W) = \mathrm{rank}\, A = 2$$

とわかる。さらに、行列 B において「段」が下がる列に注目し、行基本変形において一次独立となる列番号の組み合わせは変わらないという事実を用いることにより、行列 A の列ベクトルの組 "$\Phi(f_1), \Phi(f_3)$" は一次独立であることがわかる。したがって、それは $\Phi(W)$ の基底をなす。

座標系は線形同型写像であるから、基底を基底に写す。したがって、$\dim W = \dim \Phi(W) = 2$ であり、W の一組の基底として "f_1, f_3" が見つかる。

線形代数2・第13回 (2024年12月19日) 演習問題事前練習シート

※このシートをA4片面1枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数２・第 13 回学習内容チェックシート

2024 年 12 月 19 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
ベクトル空間 V の基底 $\mathscr{B} =$ “$v_1, \cdots, v_n$” に関する、$v \in V$ の座標ベクトルとは？	p.	
線形同型写像とは？	p.	

Q2. 次の $\boxed{}$ に適当な言葉、数字、数式、記号等を入れなさい。

- F が線形同型写像ならば、逆写像 F^{-1} も $\boxed{}$ である。
- 2 次以下の実係数多項式全体のなすベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_2$ に対して、“$x^2, x, 1$” はその 1 組の基底である。この基底の下で $\mathbb{R}[x]_2$ のベクトルと数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトルは次のように 1 対 1 に対応している：

$$\mathbb{R}[x]_2 \ni \boxed{} \overset{\Phi}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

この対応の下で、$\mathbb{R}[x]_2$ の部分空間 $\{ \ a + 2ax + 3ax^2 \ | \ a \in \mathbb{R} \ \}$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $\boxed{}$ に対応し、また、$\mathbb{R}^3$ の部分空間 $\left\{ s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \ s, t \in \mathbb{R} \right\}$ に対応する $\mathbb{R}[x]_2$ の部分空間は “$\boxed{}$” を基底に持つ。

Q3. n 次元ベクトル空間 V に基底 “$v_1, \cdots, v_n$” が与えられているとする。V の部分空間 W の基底を求めるにはどのようにすればよいか。その方針・手順を書きなさい。

$\boxed{}$

Q4. $F : V \longrightarrow U$ を n 次元ベクトル空間 V から m 次元ベクトル空間 U への $\mathbb{R}$-線形写像とする。V の基底 $\mathscr{A} =$ “$v_1, \cdots, v_n$” と U の基底 $\mathscr{B} =$ “$u_1, \cdots, u_m$” に関する F の行列表示を A とし、$\mathscr{A}$ に関する V の座標系を $\Phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ とし、$\mathscr{B}$ に関する U の座標系を $\Phi' : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ とする。このとき、F, Φ, Φ' および A から定まる線形写像 T_A の間にある関係式が成り立つ。右の図式はこれを視覚的に表現したものである。枠の中に適当な記号を書き入れなさい。さらに、その関係式を下の枠内に書きなさい。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\boxed{}"] \arrow[d, "F"'] & \boxed{} \arrow[d, "\boxed{}"] \\ U \arrow[r, "\boxed{}"] & \boxed{} \end{tikzcd}$$

$\boxed{}$

Q5. 第 13 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。