§13. 2 次曲面とその標準形

前節では 2 次曲線の標準形について調べた。ここでは、2 次曲面の標準形について調べる。

● 13 - 1 : 2 次曲面

$A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ を零でない対称行列、$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}$ とする。このとき、

(13 - 1 a) $$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x} + 2\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + c = 0$$

を満たす $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ の全体からなる集合を 2 **次曲面**という。

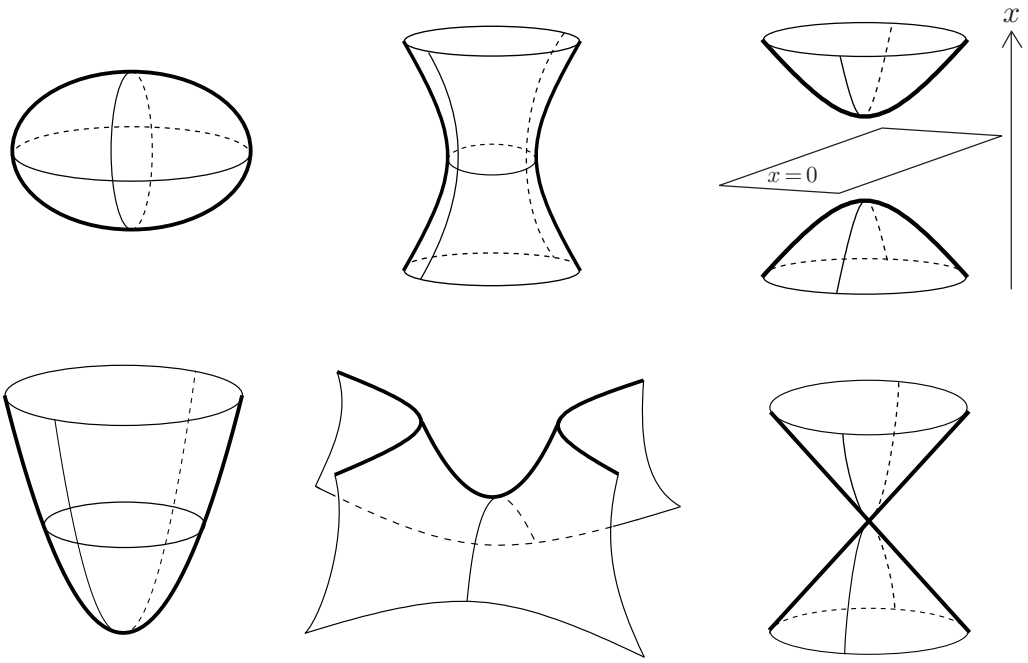
2 次曲面の代表例を以下に挙げる。

例 13 - 1 - 1 $a, b, c > 0$ を定数とする。方程式

(1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$　　(2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$　　(3) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

(4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - z = 0$　　(5) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + z = 0$　　(6) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$

によって表わされる 2 次曲面はそれぞれ**楕円面、一葉双曲面、二葉双曲面、楕円放物面、双曲放物面、楕円錐面**と呼ばれ、$\mathbb{R}^3$ において下図のような図形を描く。(二葉双曲面の図のみ、縦線は x 軸を表わす。)



ある点に関して点対称な 2 次曲面は**有心**であると呼ばれ、そうでない 2 次曲面は**無心**であると呼ばれる。(1) の楕円面と (2), (3) の双曲面、(6) の楕円錐面は原点に関して点対称な図形なので、有心であり、(4),(5) の放物面は無心である。

● 13 - 2 : 2 次曲面の標準形

(13 - 1 a) により定義される 2 次曲面 M の標準形を求めよう。

2 次曲線のときと同様に、まずは、

$$A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$$

を満たす $\mathbf{x}_0$ が存在するときを考える。この場合、M を $\mathbf{x}_0$ だけ平行移動させると、次の方程式によって定義される 2 次曲面 M' になる：

(13 - 2 a) $$\tilde{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} A\tilde{\mathbf{x}} + d = 0 \qquad (\text{但し、} d = -\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_0 + c).$$

A は対称行列であるから、回転行列により対角化可能である。そこで、$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ を A の固有値とし、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad |P| = 1$$

を満たす直交行列 $P \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ を 1 つとる。そして、

$$\mathbf{y} = P^{-1}\tilde{\mathbf{x}}$$

という変数変換を行うと、(13 - 2 a) は $(P\mathbf{y})^{\mathrm{T}} A(P\mathbf{y}) + d = 0$, すなわち、

(13 - 2 b) $$\mathbf{y}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \mathbf{y} + d = 0$$

と書き換えられる。つまり、M' は回転移動 $T_P^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ によって、(13 - 2 b) を満たす $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ の全体からなる図形 M'' に写される。$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ とおくと、(13 - 2 b) は

(13 - 2 c) $$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + d = 0$$

という等式になる。$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, d$ が正、負、0 のいずれかによって場合分けの考察を行うと、M'' がどんな図形なのかがわかる (詳しい考察は演習問題として残しておく)。M'' は M から平行移動と回転移動を行って得られているから、M がどんな図形なのかもわかる。

次に、(13 - 2 a) により与えられる 2 次曲面 M に対して、$A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ を満たす $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ が存在しない場合を考察する。A が正則ならばこのような $\mathbf{x}_0$ は存在するから、$A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ を満たす $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ が存在しないときには、$|A| = 0$ でなければならない。よって、A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ のうち少なくとも 1 つは 0 である。また、$A \neq \mathrm{O}$ (零行列) なので、すべて 0 ということはなく、必要ならば P の列ベクトルの並べ替えを行って

- $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 = 0$ の場合
- $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ の場合

の各場合を考察すればよい。

いずれの場合にも、(13 - 2 a) に対して直ちに $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$ という変数変換を行う。すると、(13 - 2 a) は

(13 - 2 d) $$\mathbf{y}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} + 2(P^{\mathrm{T}}\mathbf{b})^{\mathrm{T}}\mathbf{y} + c = 0$$

と書き換えられる。この方程式によって定義される 2 次曲面を M' とする。M' は回転移動 $T_P^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ によって、M を写した 2 次曲面である。

$$\mathbf{b}' = P^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$$

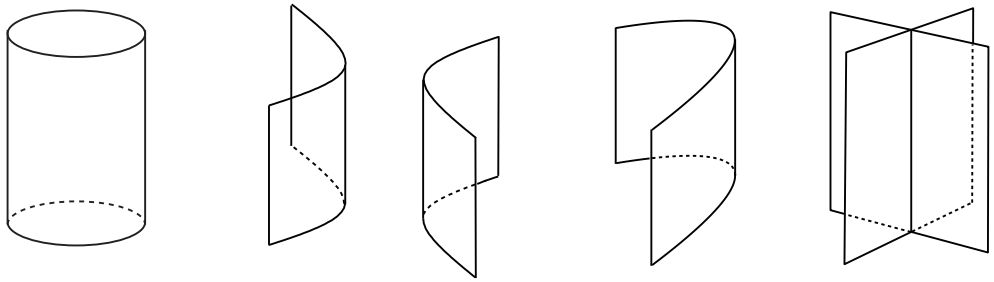
とおき、$\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{pmatrix}$ とおくと、(13 - 2 d) は次の形になる：

(13 - 2 e) $$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2(b_1' y_1 + b_2' y_2 + b_3' y_3) + c = 0.$$

① $b'_3 = 0$ の場合、(13 - 2 e) は

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2(b'_1 y_1 + b'_2 y_2) + c = 0$$

となるので、 M' は (y_1, y_2)-平面上では 2 次曲線になっている。今の場合、y_3 は自由に動けるので、M' は、下図のように、(y_1, y_2)-平面上の 2 次曲線を「縦に延ばした」形をしていることがわかる。



楕円柱面　　**双曲線柱面**　　**放物線柱面**　　**交差する 2 平面**

② $b'_3 \neq 0$ かつ $\lambda_2 \neq 0$ の場合、(13 - 2 e) を

$$\lambda_1\left(y_1 + \frac{b'_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y_2 + \frac{b'_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2b'_3 y_3 + c - \frac{(b'_1)^2}{\lambda_1} - \frac{(b'_2)^2}{\lambda_2} = 0$$

と書き換える。そして、

$$z_1 = y_1 + \frac{b'_1}{\lambda_1}, \qquad z_2 = y_2 + \frac{b'_2}{\lambda_2}, \qquad z_3 = y_3 + \frac{1}{2b'_3}\left(c - \frac{(b'_1)^2}{\lambda_1} - \frac{(b'_2)^2}{\lambda_2}\right)$$

という変数変換 (平行移動) を行う。すると、(13 - 2 e) は次のように表わされる：

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + 2b'_3 z_3 = 0. \tag{13 - 2 f}$$

したがって、M は楕円放物面か双曲放物面である (詳細は演習問題とする)。

③ $b'_3 \neq 0$ かつ $\lambda_2 = 0$ の場合、(13 - 2 e) を

$$\lambda_1\left(y_1 + \frac{b'_1}{\lambda_1}\right)^2 + 2b'_2 y_2 + 2b'_3 y_3 + c - \frac{(b'_1)^2}{\lambda_1} = 0$$

と書き換える。そして、

$$z_1 = y_1 + \frac{b'_1}{\lambda_1}, \qquad z_2 = y_2, \qquad z_3 = y_3 + \frac{1}{2b'_3}\left(c - \frac{(b'_1)^2}{\lambda_1}\right)$$

という変数変換 (平行移動) を行う。すると、(13 - 2 e) は次のように表わされる：

$$\lambda_1 z_1^2 + 2b'_2 z_2 + 2b'_3 z_3 = 0. \tag{13 - 2 g}$$

さらに、

$$\begin{aligned} w_1 &= z_1, \\ w_2 &= \frac{1}{\sqrt{(b'_2)^2 + (b'_3)^2}}(b'_3 z_2 - b'_2 z_3), \\ w_3 &= \frac{1}{\sqrt{(b'_2)^2 + (b'_3)^2}}(b'_2 z_2 + b'_3 z_3) \end{aligned}$$

のように変数変換を行うと、この変数変換は回転による変数変換になっており、

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{*}}b'_3 & \frac{1}{\sqrt{*}}b'_2 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{*}}b'_2 & \frac{1}{\sqrt{*}}b'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \qquad (* = (b'_2)^2 + (b'_3)^2)$$

であるから、(13 - 2 g) は次のように書き換えられることがわかる：

$$\lambda_1 w_1^2 + 2\sqrt{(b_2')^2 + (b_3')^2} w_3 = 0. \tag{13 - 2 h}$$

これは放物柱面を表わしている。

以上の考察から、次の定理を得る。

定理 13 - 2 - 1

$A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ を零でない対称行列、$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}$ とし、M を

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^{\mathrm{T}} \mathbf{x} + c = 0 \tag{13 - 2 i}$$

を満たす $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ の全体が作る 2 次曲面とする。λ_1 $(\neq 0)$, λ_2, λ_3 を A の固有値とすると、M は回転移動と平行移動により、次のいずれかの方程式を満たす点 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ の全体のなす 2 次曲面に変換される：

(Type1) $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + d = 0$ (d はある定数)

(Type2) $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + b' y_3 = 0$ (b' は 0 でないある定数)

これらを 2 **次曲面の標準形**と呼ぶ。

(**証明**)

$A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ を満たす $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ が存在せず、

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad |P| = 1$$

を満たす直交行列 $P \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ を用いて

$$\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{pmatrix} = P^{\mathrm{T}} \mathbf{b}$$

とおいたとき、$b_3' = 0$ となる場合のみ、標準形にできることが明示されていないので、ここで確かめておく。この場合には、$\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$ という変数変換を行うと、M は

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2(b_1' y_1 + b_2' y_2) + c = 0$$

という 2 次方程式が定める 2 次曲面に写されるのであった。これは (y_1, y_2)-平面上で 2 次曲線を表わすから、(y_1, y_2)-平面上での回転移動と平行移動により、

① $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + d = 0$ (d はある定数)

または

② $\lambda_1 z_1^2 + b' z_2 = 0$ (b' は 0 でない定数)

という標準形に写される。$z_3 = y_3$ と定めることにより、(y_1, y_2)-平面上で行った回転移動と平行移動は $\mathbb{R}^3$ における回転移動と平行移動に拡張することができる。①は (Type1) に属している。一方、②は (Type2) に属している。実際、z_2 と z_3 を入れ換えて、z_1 を $-z_1$ に移動させる回転移動を使って、②の方程式を (Type2) の方程式に帰着させることができる。 □

注意. 標準形が (Type1) の場合、2 次曲面は有心であり、(Type2) の場合、2 次曲面は無心である。

No.13 2025 年 7 月 7 日

線形代数 3 事前練習用演習問題

pre13-1. 方程式

$$x^2+3y^2+3z^2-2yz+2x-6y+2z-1=0$$

によって定義される 2 次曲面 M の標準形を求め、その曲面の名称を述べよ。併せて、標準形にするための変数変換の仕方を具体的に記せ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre13-1. $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&-1\\0&-1&3\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$ とおくと、与えられた方程式は

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}+2\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}-1=0 \tag{$*1$}$$

と表わされる。$(3,6)$-行列 $(A|E_3)$ に行基本変形を施すことにより、$(E_3|X)$ の形にすることができるから、A は正則であり、その逆行列は $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{3}{8}&\frac{1}{8}\\0&\frac{1}{8}&\frac{3}{8}\end{pmatrix}$ である。したがって、$\mathbf{x}_0=A^{-1}\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ とおき、変数変換 $\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{x}+\mathbf{x}_0$ を行うと、$(*1)$ は

$$\tilde{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}A\tilde{\mathbf{x}}+d=0 \tag{$*2$}$$

と表わされる。ここで、$d=-\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_0-1=-5$ である。

A の固有多項式は $\Delta_A(x)=(x-1)(x-2)(x-4)$ となるから、固有値は $1,2,4$ である。したがって、$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ を満たす回転行列 P をとれば、変数変換 $\tilde{\mathbf{x}}=P\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ により、$(*2)$ は方程式

$$X^2+2Y^2+4Z^2-5=0 \tag{$*3$}$$

に変換される。よって、M の標準形は $X^2+2Y^2+4Z^2-5=0$ であり、これは楕円面を表わす。

上記の P は、A の各固有値に属する固有空間の正規直交基底を並べて作ることができる。計算により、

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

が見つかる。よって、(x,y,z)-座標空間における点 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ を、標準形を与える座標 $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ で表わすには次式を用いればよい：$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=X\mathbf{p}_1+Y\mathbf{p}_2+Z\mathbf{p}_3$. ここで、$\mathbf{p}_j$ $(i=1,2,3)$ は P の第 j 列ベクトルである：$P=(\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \mathbf{p}_3)$.

第 13 回 (2025 年 7 月 7 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数３・第 13 回学習内容チェックシート　　2025 年 7 月 7 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. a, b, c を正の実数とする。以下の各方程式によって表わされる (x, y, z)-座標空間内の 2 次曲面の名称を答え、概形を描け。

方程式	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
名称			
概形			
方程式	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+z=0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
名称			
概形			
方程式	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
名称			
概形			

Q2. $\lambda_1\ (\neq 0)$, λ_2, λ_3, d を実定数とし、方程式

$$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 y_3^2+d=0$$

が定める (y_1, y_2, y_3)-座標空間内の 2 次曲面を M とおく。$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, d$ が次の各条件を満たす場合に、M はどんな 2 次曲面になるか。

(i) $\lambda_1 d<0,\ \lambda_2 d<0,\ \lambda_3 d<0$ のとき ＿＿＿＿＿＿＿＿

(ii) $\lambda_1 d<0,\ \lambda_2 d<0,\ \lambda_3 d>0$ のとき ＿＿＿＿＿＿＿＿

(iii) $\lambda_1 d<0,\ \lambda_2 d>0,\ \lambda_3 d>0$ のとき ＿＿＿＿＿＿＿＿

(iv) $\lambda_1 d<0,\ \lambda_2 d<0,\ \lambda_3=0$ のとき ＿＿＿＿＿＿＿＿

(v) $\lambda_1 d<0,\ \lambda_2 d>0,\ \lambda_3=0$ のとき ＿＿＿＿＿＿＿＿

(vi) $\lambda_1 d<0,\ \lambda_2=0,\ \lambda_3=0$ のとき ＿＿＿＿＿＿＿＿

(vii) $\lambda_2>0,\ \lambda_3<0,\ d=0$ のとき ＿＿＿＿＿＿＿＿

(viii) $\lambda_2<0,\ \lambda_3=0,\ d=0$ のとき
$\lambda_1>0$ ならば
$\lambda_1<0$ ならば

(ix) $\lambda_2=0,\ \lambda_3=0,\ d=0$ のとき ＿＿＿＿＿＿＿＿

Q3. 第 13 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。