§13. 広義固有空間分解と固有値の重複度

V 上の線形変換 T の固有値 α に属する固有空間は $T-\alpha\mathrm{id}_V$ の核に一致するが、対角化不可能な場合にはそれだけを考えていたのでは不十分である。そこで、$T-\alpha\mathrm{id}_V$ を十分大きな数だけ冪乗したものの核を考える。この空間を広義固有空間という。ここでは、三角化可能な線形変換 T が与えられた有限次元ベクトル空間は、T に関する広義固有空間の直和に分解されることを示す。いつものように、$\mathbb{K}$ は体とする。

● 13-1：広義固有空間

$V\ (\neq \{0_V\})$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし、$T: V \longrightarrow V$ を $\mathbb{K}$-線形変換とする。T の固有値 $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して、次の部分集合を α に属する T の**広義固有空間**または**一般固有空間**という：

(13-1 a) $$\tilde{W}(\alpha, T) = \{\ v \in V \mid (T-\alpha\mathrm{id}_V)^n(v) = 0 \text{ となる } n \in \mathbb{N} \text{ が存在する }\}.$$

T が明白なときには、単に $\tilde{W}(\alpha)$ で表わす。

補題 13-1-1

$V\ (\neq \{0_V\})$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし、$T: V \longrightarrow V$ を $\mathbb{K}$-線形変換とする。T の固有値 $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して、$\tilde{W}(\alpha)$ は V の T-不変部分空間である。

(**証明**)

$\tilde{W}(\alpha)$ が部分空間をなすことは演習問題として残し、ここでは T-不変性を示す。

$v \in \tilde{W}(\alpha)$ を任意にとり、$T(v) \in \tilde{W}(\alpha)$ を示す。$\tilde{W}(\alpha)$ の定義より、$(T-\alpha\mathrm{id}_V)(v) \in \tilde{W}(\alpha)$ となる。$(T-\alpha\mathrm{id}_V)(v) = T(v) - \alpha v$ より $T(v)-\alpha v \in \tilde{W}(\alpha)$ である。$\alpha v \in \tilde{W}(\alpha)$ であるから、$T(v) = (T(v)-\alpha v) + \alpha v \in \tilde{W}(\alpha)$ を得る。故に、$\tilde{W}(\alpha)$ は T-不変である。 □

注意. $\{0\} \subset \mathrm{Ker}\,(T-\alpha\mathrm{id}_V) \subset \mathrm{Ker}\,(T-\alpha\mathrm{id}_V)^2 \subset \cdots\cdots \subset \mathrm{Ker}\,(T-\alpha\mathrm{id}_V)^k \subset \cdots\cdots$

であるから、V が有限次元ならば、十分大きな自然数 k に対して

$$\mathrm{Ker}\,(T-\alpha\mathrm{id}_V)^k = \mathrm{Ker}\,(T-\alpha\mathrm{id}_V)^{k+1} = \cdots\cdots$$

となることがわかる。このとき $\tilde{W}(\alpha)$ は次で与えられる：

(13-1 b) $$\tilde{W}(\alpha) = \mathrm{Ker}\,(T-\alpha\mathrm{id}_V)^k.$$

● 13-2：広義固有空間分解

有限次元ベクトル空間 V 上に三角化可能な線形変換 T が与えられると、V は広義固有空間の直和に分解される。このことを示す。そのために、多項式についての次の補題を用いる。

補題 13-2-1

0 でない多項式 $f_1, \cdots, f_n \in \mathbb{K}[x]$ に対して次が成り立つ：

$f_1, \cdots, f_n$ は互いに素である (すなわち、1 次以上の共通因子を持たない)

$\iff$ $a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n = 1$ を満たす多項式 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}[x]$ が存在する

定理 13-2-2 (広義固有空間分解)

$V\ (\neq \{0_V\})$ を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし、$T: V \longrightarrow V$ を三角化可能な $\mathbb{K}$-線形変換とする。このとき、V は広義固有空間の直和に分解される：

(13-2 a) $$V = \tilde{W}(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus \tilde{W}(\alpha_r).$$

但し、$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ は T の相異なる固有値の全体である。

この直和分解を T による V の**広義固有空間分解**と呼ぶ。

(**証明**)

T は三角化可能であるから、T の固有多項式 $\Delta_T(x)$ は一次式の積に分解される：

$$\Delta_T(x) = (x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_r)^{m_r}.$$

各 $i = 1, \cdots, r$ に対して

$$f_i(x) = \prod_{j \neq i}(x-\alpha_j)^{m_j}$$

とおく。$f_1(x), \cdots, f_r(x)$ は互いに素であるから、[補題13-2-1] により、

(13-2 b) $$a_1 f_1 + \cdots + a_r f_r = 1$$

を満たす多項式 $a_1, \cdots, a_r \in \mathbb{K}[x]$ が存在する。各 $i = 1, \cdots, r$ に対して写像 $P_i : V \longrightarrow V$ を $P_i := a_i(T) \circ f_i(T)$ によって定義する。(13-2 b) により、

(13-2 c) $$P_1 + \cdots + P_r = \mathrm{id}_V$$

が成り立つ。さらに、$i \neq j$ のとき、Cayley-Hamilton の定理より、

(13-2 d) $$P_i \circ P_j = \Big(\prod_{k \neq i,j}(T-\alpha_k \mathrm{id}_V)^{m_k}\Big) \circ \Delta_T(T) = 0$$

となる。また、このことと (13-2 c) より

(13-2 e) $$P_i \circ P_i = P_i \circ (\sum_{j=1}^{r} P_j) = P_i \circ \mathrm{id}_V = P_i$$

を得る。(13-2 c), (13-2 d), (13-2 e) より、次の直和分解を得る：

(13-2 f) $$V = (\mathrm{Im}\, P_1) \oplus \cdots \oplus (\mathrm{Im}\, P_r).$$

最後に、$\mathrm{Im}\, P_i = \tilde{W}(\alpha_i)$ $(i = 1, \cdots, r)$ を示す。任意に $v \in \mathrm{Im}\, P_i$ をとると、$v = (a_i(T) \circ f_i(T))(v')$ となる $v' \in V$ が存在する。すると

$$(T-\alpha_i \mathrm{id}_V)^{m_i}(v) = ((T-\alpha_i \mathrm{id}_V)^{m_i} \circ a_i(T) \circ f_i(T))(v') = (a_i(T) \circ \Delta_T(T))(v') = 0_V$$

が成り立つので、$v \in \tilde{W}(\alpha_i)$ がわかる。つまり、次が成立する：

(13-2 g) $$\mathrm{Im}\, P_i \subset \tilde{W}(\alpha_i).$$

逆向きの包含関係を示すため、$v \in \tilde{W}(\alpha_i)$ を任意にとる。直和分解 (13-2 f) に基づいて

$$v = v_1 + \cdots + v_r \qquad (v_1 \in \mathrm{Im}\, P_1, \cdots, v_r \in \mathrm{Im}\, P_r)$$

と書く。$v_j = 0$ $(j \neq i)$ を示せばよい。

$v \in \tilde{W}(\alpha_i)$ より、ある k に対して $(T-\alpha_i \mathrm{id}_V)^k(v) = 0$ となる。よって、次式が成り立つ：

(13-2 h) $$0 = (T-\alpha_i \mathrm{id}_V)^k(v_1) + \cdots + (T-\alpha_i \mathrm{id}_V)^k(v_r).$$

各 v_j は $\mathrm{Im}\, P_j$ に属するので、$v_j = (a_j(T) \circ f_j(T))(v'_j)$ $(v'_j \in V)$ と書ける。これより、

$$\begin{aligned}(T-\alpha_i \mathrm{id}_V)^k(v_j) &= \big((T-\alpha_i \mathrm{id}_V)^k \circ a_j(T) \circ f_j(T)\big)(v'_j) \\ &= \big(a_j(T) \circ f_j(T) \circ (T-\alpha_i \mathrm{id}_V)^k\big)(v'_j) = P_j((T-\alpha_i \mathrm{id}_V)^k(v'_j)) \in \mathrm{Im}\, P_j\end{aligned}$$

がわかる。よって、(13-2 h) は直和分解 (13-2 f) の下での 0 の分解となるので、

$$(T-\alpha_i \mathrm{id}_V)^k(v_j) = 0 \qquad (j = 1, \cdots, r)$$

を得る。さて、$j \neq i$ のとき、2 つの多項式 $(x-\alpha_j)^{m_j}$ と $(x-\alpha_i)^k$ は互いに素であるから、$a(x-\alpha_j)^{m_j} + b(x-\alpha_i)^k = 1$ となる $a, b \in \mathbb{K}[x]$ が存在する。したがって、

$$v_j = (a(T) \circ (T-\alpha_j \mathrm{id}_V)^{m_j})(v_j) + (b(T) \circ (T-\alpha_i \mathrm{id}_V)^k)(v_j) = (a(T))(0) + (b(T))(0) = 0$$

となる。よって、$v = v_i \in \operatorname{Im} P_i$ であり、(13-2 g) と合わせて $\operatorname{Im} P_i = \tilde{W}(\alpha_i)$ が示された。 □

● 13-3：固有値の重複度

V ($\neq \{0_V\}$) を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし、$T : V \longrightarrow V$ を $\mathbb{K}$-線形変換とする。T の固有値 $\alpha \in \mathbb{K}$ について、「$\varDelta_T(x)$ は $(x-\alpha)^m$ で割り切れるが、$(x-\alpha)^{m+1}$ では割り切れない」を満たす自然数 m のことを T の固有値 α の**重複度**という。T が三角化可能なとき、T の固有多項式 $\varDelta_T(x)$ は

$$\varDelta_T(x) = (x-\alpha_1)^{m_1} \cdots (x-\alpha_r)^{m_r}$$

(但し、$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ は異なる $\mathbb{K}$ の元で、$m_1, \cdots, m_r$ は自然数) と表わされる。このとき、T の固有値 α_i ($i = 1, \cdots, r$) の重複度は m_i に一致する。

n 次正方行列 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ に対して、A の $\mathbb{K}$ 内の固有値 α の**重複度**とは、$\mathbb{K}$-線形変換 $T_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ の固有値 α の重複度のことをいう。

例 13-3-1 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の固有多項式は $\varDelta_A(x) = (x-3)^2 x$ と因数分解されるから、A の $\mathbb{R}$ 内の固有値は $3, 0$ であり、固有値 $3, 0$ の重複度はそれぞれ $2, 1$ である。 □

● 13-4：広義固有空間上への制限写像の固有多項式

補題 13-4-1
V ($\neq \{0_V\}$) を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし、$T : V \longrightarrow V$ を三角化可能な $\mathbb{K}$-線形変換とする。$\alpha \in \mathbb{K}$ を T の固有値とすると、[補題 13-1-1] により、線形変換 $T|_{\tilde{W}(\alpha)} : \tilde{W}(\alpha) \longrightarrow \tilde{W}(\alpha)$ が定義される。このとき、線形変換 $T|_{\tilde{W}(\alpha)}$ の固有多項式は、$m = \dim \tilde{W}(\alpha)$ とおくと、$\varDelta_{T|_{\tilde{W}(\alpha)}}(x) = (x-\alpha)^m$ となる。特に、$T|_{\tilde{W}(\alpha)}$ の固有値は α のみである。

(**証明**)

$\alpha = \alpha_1$ とおき、α 以外の T の相異なる固有値の全体を $\alpha_2, \cdots, \alpha_r$ とすると、広義固有空間分解より、$V = \tilde{W}(\alpha_1) \oplus \tilde{W}(\alpha_2) \oplus \cdots \oplus \tilde{W}(\alpha_r)$ となる。$V_1 = \tilde{W}(\alpha_2) \oplus \cdots \oplus \tilde{W}(\alpha_r)$ とおくと、V_1 は T-不変な V の部分空間であるから、T は 2 つの線形変換 $T|_{\tilde{W}(\alpha)}$, $T|_{V_1}$ の直和になる：$T = T|_{\tilde{W}(\alpha)} \oplus T|_{V_1} : V = \tilde{W}(\alpha) \oplus V_1 \longrightarrow \tilde{W}(\alpha) \oplus V_1 = V$.

よって、$\varDelta_T(x) = \varDelta_{T|_{\tilde{W}(\alpha)}}(x) \cdot \varDelta_{T|_{V_1}}(x)$ が成り立つ。T は三角化可能であるから、$\varDelta_T(x)$ は $\mathbb{K}[x]$ において一次式の積に分解する。したがって、$\varDelta_{T|_{\tilde{W}(\alpha)}}(x)$ も $\mathbb{K}[x]$ において一次式の積に分解する。そこで、

$$\varDelta_{T|_{\tilde{W}(\alpha)}}(x) = (x-\alpha'_1) \cdots (x-\alpha'_m) \qquad (\alpha'_1, \cdots, \alpha'_m \in \mathbb{K})$$

とおく。$\alpha'_i = \alpha$ ($i = 1, \cdots, m$) となることを示す。

各 α'_i は $T|_{\tilde{W}(\alpha)}$ の固有値であるから、$T(v_i) = \alpha'_i v_i$ となる $v_i \in \tilde{W}(\alpha)$ であって、$v_i \neq 0$ となるものが存在する。$\tilde{W}(\alpha) = \operatorname{Ker}(T - \alpha \mathrm{id}_V)^k$ と表わされるから、$(T - \alpha \mathrm{id}_V)^k(v_i) = 0$ である。$T(v_i) = \alpha'_i v_i$ を繰り返し用いると、

$$\begin{aligned}(T - \alpha \mathrm{id}_V)^k(v_i) &= (T - \alpha \mathrm{id}_V)^{k-1}(T(v_i) - \alpha v_i) = (T - \alpha \mathrm{id}_V)^{k-1}(\alpha'_i v_i - \alpha v_i) \\ &= (\alpha'_i - \alpha)(T - \alpha \mathrm{id}_V)^{k-1}(v_i) = \cdots\cdots \\ &= (\alpha'_i - \alpha)^k v_i\end{aligned}$$

となることがわかる。よって、$(\alpha'_i - \alpha)^k v_i = 0$ を得る。$v_i \neq 0$ であるから、$(\alpha'_i - \alpha)^k = 0$ すなわち、$\alpha'_i = \alpha$ でなければならない。こうして、$\varDelta_{T|_{\tilde{W}(\alpha)}}(x) = (x-\alpha)^m$ が示された。 □

● 13-5：広義固有空間の次元と固有値の重複度

定理 13-5-1
V $(\neq \{0_V\})$ を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし、$T : V \longrightarrow V$ を三角化可能な $\mathbb{K}$-線形変換とする。すると、T の固有多項式 $\Delta_T(x)$ は一次式の積に分解される：

$$\Delta_T(x) = (x - \alpha_1)^{m_1} \cdots (x - \alpha_r)^{m_r}$$

(但し、$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ は異なる $\mathbb{K}$ の元で、$m_1, \cdots, m_r$ は自然数).

このとき、各固有値 α_i に対して、$\dim \tilde{W}(\alpha_i) = m_i$ である。

(証明)

$n_i = \dim \tilde{W}(\alpha_i)$ とおくと、[補題13-4-1] により $\Delta_{T|_{\tilde{W}(\alpha_i)}} = (x-\alpha_i)^{n_i}$ となる。$V = \tilde{W}(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus \tilde{W}(\alpha_r)$ であって、各 $\tilde{W}(\alpha_i)$ は T-不変であるから、$\Delta_T(x) = \Delta_{T|_{\tilde{W}(\alpha_1)}}(x) \cdots \Delta_{T|_{\tilde{W}(\alpha_r)}}(x)$ となる。よって、

$$(x - \alpha_1)^{m_1} \cdots (x - \alpha_r)^{m_r} = (x - \alpha_1)^{n_1} \cdots (x - \alpha_r)^{n_r}$$

を得る。両辺における一次因子 $x - \alpha_i$ の個数を比較して、$m_i = n_i$ がわかる。 □

例 13-5-2 実正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ が定める $\mathbb{R}$-線形変換 $T_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ に対して、固有値 α に属する広義固有空間 $\tilde{W}(\alpha)$ を求めよう。

A の固有多項式は、実数の範囲内で $\Delta_A(x) = x^3(x-3)$ のように因数分解されることがわかる。よって、A は $\mathbb{R}$ 上三角化可能であり、その固有値は $0, 3$ である。$T_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ の固有値 $\alpha = 0, 3$ に属する広義固有空間を $\tilde{W}(\alpha)$ とおく。[定理13-5-1] より、$\dim \tilde{W}(0) = 3,\ \dim \tilde{W}(3) = 1$ とわかる。

• $\tilde{W}(3)$ を求める。$\dim \tilde{W}(3) = 1$ なので、$\tilde{W}(3) = W(3) = \mathrm{Ker}\, T_{A-3E_4}$ である。$A - 3E_4$ に行基本変形を施し、$(A - 3E_4)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解いて、$\tilde{W}(3)$ は次で与えられることがわかる：

$$\tilde{W}(3) = \left\{ \ t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ \middle|\ t \in \mathbb{R} \ \right\}.$$

• $\tilde{W}(0)$ を求める。$\dim(\mathrm{Ker}\ T_{A-0E_4}) = 4 - \mathrm{rank}\, A = 4 - 3 = 1 < 3 = \dim \tilde{W}(0)$ であるから、$\mathrm{Ker}\ T_{A-0E_4} \subsetneqq \tilde{W}(0)$ である。

$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & -2 & 0 & -9 \\ -10 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ に行基本変形を施して階段型にすることにより、$\mathrm{rank}\,(A^2) = 2$ がわかる。よって、

$$\dim(\mathrm{Ker}\ T_{(A-0E_4)^2}) = 4 - \mathrm{rank}\,(A^2) = 2 < 3 = \dim \tilde{W}(0)$$

であり、したがって、$\mathrm{Ker}\ T_{(A-0E_4)^2} \subsetneqq \tilde{W}(0)$ である。さらに、A^3 を計算して $\mathrm{rank}\,(A^3) = 1$ がわかるから、$\dim(\mathrm{Ker}\ T_{(A-0E_4)^3}) = 4 - \mathrm{rank}\,(A^3) = 3 = \dim \tilde{W}(0)$ であり、したがって、$\tilde{W}(0) = \mathrm{Ker}\ T_{(A-0E_4)^3}$ を得る。$A^3\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解いて、$\tilde{W}(0)$ は次で与えられることがわかる：

$$\tilde{W}(0) = \left\{ \ \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ \middle|\ s, t, u \in \mathbb{R} \ \right\}.$$

No.13　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　2025 年 12 月 22 日

線形代数 4 事前練習用演習問題

pre13-1. A を 3 次実正方行列とし、A から定まる $\mathbb{R}$-線形写像 $T_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を考える。

(1) A の固有多項式は $\Delta_A(x) = (x-1)(x-2)^2$ であるとする。

(i) $f_1 = (x-2)^2,\ f_2 = x-1 \in \mathbb{R}[x]$ とおく。

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 = 1$$

を満たす多項式 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}[x]$ を一組求めよ。

(ii) A の固有値 α に属する広義固有空間 $\tilde{W}(\alpha, T_A)$ は A についてのある多項式 $p_\alpha(A)$ の列ベクトルによって張られる空間に一致する。A の各固有値 α に対して、このような $p_\alpha(A)$ を 1 つずつ求めよ。

(2) $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ のとき、(1) を利用して、A の各固有値 α に対して広義固有空間 $\tilde{W}(\alpha, T_A)$ を求めよ。さらに、$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を $\tilde{W}(1, T_A)$ の元と $\tilde{W}(2, T_A)$ の元の和で表わせ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre13-1. (1) (i) f_1 を f_2 で割ると、$f_1 = (x-3)f_2 + 1$ となる。したがって、$a_1 = 1,\ a_2 = -x+3$ とおくと、$a_1 f_1 + a_2 f_2 = 1$ となる。

(ii) $P_i := a_i(A) f_i(A)\ (i = 1, 2)$ とおくと、$\mathrm{Im}\, P_i = \tilde{W}(i, T_A)$ となる ([定理 13 - 2 - 2] の証明を参照)。したがって、

$$p_1(A) = P_1 = a_1(A) f_1(A) = (A - 2E_3)^2,$$
$$p_2(A) = P_2 = a_2(A) f_2(A) = (-A + 3E_3)(A - E_3)$$

とおけばよい。

(2) A の固有多項式は $\Delta_A(x) = (x-1)(x-2)^2$ であることが確かめられる。(1)(ii) より、$\tilde{W}(1, T_A), \tilde{W}(2, T_A)$ はそれぞれ $p_1(A) = (A - 2E_3)^2,\ p_2(A) = (-A + 3E_3)(A - E_3)$ の列ベクトルにより張られる空間に一致する。

$$p_1(A) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$p_2(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形の繰り返し}} \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots (*)$$

であるから、

$$\tilde{W}(1, T_A) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \tilde{W}(2, T_A) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

となる。

$p_1(A)+p_2(A)=E_3$ であるから、$\mathbf{x}=p_1(A)\mathbf{x}+p_2(A)\mathbf{x}$ と表わされる。$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とおくと

$$p_1(A)\mathbf{x}=(-2x+y+2z)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\qquad p_2(A)\mathbf{x}=x\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

となる。$(*)$ より、

$$\begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

と表わされるから、

$$p_2(A)\mathbf{x}=(x-z)\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}+(-y+z)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

と書き換えられる。このように、$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ は $\tilde{W}(1,T_A)$ の元 $p_1(A)\mathbf{x}=(-2x+y+2z)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ と $\tilde{W}(2,T_A)$ の元 $p_2(A)\mathbf{x}=(x-z)\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}+(-y+z)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ の和により表わされる。

グレー部分を修正（2025 年 12 月 22 日 16 時 30 分）

線形代数４・第13回 (2025年12月22日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数４・第 13 回学習内容チェックシート 2025 年 12 月 22 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. V $(\neq \{0_V\})$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし、T を V 上の $\mathbb{K}$-線形変換とする。T の固有値 α に属する固有空間 $W(\alpha, T)$ と広義固有空間 $\tilde{W}(\alpha, T)$ はそれぞれどのように定義されるか。

$W(\alpha, T) =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ ,

$\tilde{W}(\alpha, T) =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q2. V $(\neq \{0_V\})$ を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし、T を V 上の $\mathbb{K}$-線形変換とする。

(1) T の固有値 α の重複度とは何か。その定義を述べよ。

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(2) T の固有多項式が $\mathit{\Delta}_T(x) = x^2(x+5)(x-4)^3$ により与えられるとき、T の固有値とその重複度を求めると次のようになる。

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q3. V $(\neq \{0_V\})$ を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし、T を V 上の三角化可能な $\mathbb{K}$-線形変換とする。

(1) T による V の広義固有空間分解とは何か。説明せよ。

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(2) $\mathit{\Delta}_T(x) = (x-\alpha_1)^{m_1} \cdots (x-\alpha_r)^{m_r}$ (但し、$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ は異なる $\mathbb{K}$ の元で、$m_1, \cdots, m_r$ は自然数) であるとき、各 $i = 1, \cdots, r$ に対して

$$\dim \tilde{W}(\alpha_i, T) = \underline{\qquad}$$

Q4. 4 次実正方行列 A の固有多項式は $\mathit{\Delta}_A(x) = (x+2)(x-4)^3$ により与えられるものとする。$\mathbb{R}$-線形変換 $T_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ を考える。

(1) $\dim \tilde{W}(-2, T_A) =$ ＿＿＿ であるから、$\tilde{W}(-2, T_A) = W(-2, T_A) = \mathrm{Ker}$＿＿＿＿＿ となる。このことから、$\tilde{W}(-2, T_A)$ を求めるには、連立一次方程式

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

を $\mathbb{R}$ の範囲で解けばよい。

(2) $\dim \tilde{W}(4, T_A) =$ ＿＿＿ である。

$k \in \mathbb{N}$ に対して、$\tilde{W}(4, T_A)$ の部分空間 $\mathrm{Ker}\, T_{(A-4E_4)^k}$ の次元は、$\mathrm{rank}\,(A-4E_4)^k$ を用いて

$$\dim(\mathrm{Ker}\, T_{(A-4E_4)^k}) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

で与えられる。このことから、$k = 1, 2, \cdots$ と順番に考えて、初めて $\dim(\mathrm{Ker}\, T_{(A-4E_4)^k}) =$ ＿＿＿ となる k を見つけると $\tilde{W}(4, T_A) = \mathrm{Ker}\, T_{(A-4E_4)^k}$ となるので、この k について、連立一次方程式

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

を $\mathbb{R}$ の範囲で解けば、$\tilde{W}(4, T_A)$ が求められる。

Q5. 第 13 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。