§13. 部分分数展開と有理関数の積分

ここでは、

$$\frac{2x^5 - 3x^4 + x^3 + 5x - 2}{x^4 - x^3 - x + 1}$$

のように 2 つの多項式の商の形で与えられる関数の積分の計算方法を学ぶ。

● 13 - 1 : 多項式

文字 x を**不定元**とする**多項式**とは、

$$2 + x, \quad 1 - 3x + x^2, \quad 1 - x + x^2 - x^3$$

のように、0 以上のある整数 n と実数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ により

(13 - 1 a) $$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

の形に表わされる‘式’のことをいう。$a_0, a_1, \cdots, a_n$ のうち $a_k \neq 0$ となる最大の k をその多項式の**次数**といい、そのような多項式のことを k **次式**と呼ぶ。

２つの多項式

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$
$$Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$$

が**等しい**とは、0 以上のすべての整数 i について、$P(x)$ における x^i の係数と $Q(x)$ における x^i の係数が等しい、すなわち、$a_i = b_i$ となるときをいう (但し、$i > n,\ j > m$ に対しては $a_i = 0,\ b_j = 0$ と約束する)。このことを $P(x) = Q(x)$ と書き表わす。特に、多項式 $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ について「$P(x) = 0$」とは、$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$ となることを意味する。

補題 13 - 1 - 1 (除法の定理)

多項式 $P(x)$ と 0 でない多項式 $Q(x)$ に対して、

(13 - 1 b) $P(x) = L(x)Q(x) + R(x)$ 　 ($R(x) = 0$ または ($R(x)$ の次数)<($Q(x)$ の次数))

を満たす多項式 $L(x), R(x)$ が存在する。$L(x), R(x)$ をそれぞれ $P(x)$ を $Q(x)$ で割ったときの**商**、**余り**と呼ぶ。

例 13 - 1 - 2 多項式 $P(x) = x^5 + 1$ を多項式 $Q(x) = x^2 + 2$ で割ったときの商は $x^3 - 2x$, 余りは $4x + 1$ である。

● 13 - 2 : 有理式

有理式とは、2 つの多項式の商 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (但し、$Q(x) \neq 0$) の形に書かれる式のことをいう。2 つの有理式 $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ が等しいとは、多項式として、

$$P_1(x)Q_2(x) = P_2(x)Q_1(x)$$

が成り立つときをいう。

例 13 - 2 - 1 有理式 $\dfrac{x+4}{(2x+1)(x-3)}$ は有理式の和 $\dfrac{a}{2x+1}+\dfrac{b}{x-3}$ $(a,\ b\in\mathbb{R})$ に書くことができる。

$$\frac{x+4}{(2x+1)(x-3)}=\frac{a}{2x+1}+\frac{b}{x-3}\qquad(a,\ b\in\mathbb{R})$$

とおき、両辺に $(2x+1)(x-3)$ を掛けて分母を払う。すると、

$$(☆)\qquad x+4=a(x-3)+b(2x+1)=(a+2b)x+(-3a+b)$$

となる。係数を比較して、

$$\begin{cases} a+2b=1, \\ -3a+b=4 \end{cases}$$

を得る。これを解いて、$a=-1,\ b=1$ を得る (注：(☆) において $x=3$ と $x=-\frac{1}{2}$ を代入しても a,b が求められる)。よって、与えられた有理式は次のように表わすことができる：

$$\frac{x+4}{(2x+1)(x-3)}=\frac{-1}{2x+1}+\frac{1}{x-3}.$$

● 13 - 3 : 部分分数展開

有理式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ において ($P(x)$ の次数) $<$ ($Q(x)$ の次数) であるとする。

もし、分母の多項式が $Q(x)=(x-a)^m$ (a は定数、m は自然数) の形をしているならば、この有理式は

$$(13\text{-}3\text{ a})\qquad \frac{A_k}{(x-a)^k}\quad (A_k\in\mathbb{R},\ k=1,\cdots,m)$$

の形をした有理式の和に書くことができる。

例 13 - 3 - 1 $\dfrac{x^2}{(x-1)^3}=\dfrac{(x-1)^2+2(x-1)+1}{(x-1)^3}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x-1)^3}.$

もし、分母の多項式が $Q(x)=\big((x-b)^2+c^2\big)^n$ (b,c は定数、$c\neq 0$, n は自然数) の形をしているならば、有理式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ は

$$(13\text{-}3\text{ b})\qquad \frac{B_lx+C_l}{\big((x-b)^2+c^2\big)^l}\quad (B_l,C_l\in\mathbb{R},\ l=1,\cdots,n)$$

の形をした有理式の和に書くことができる。

例 13 - 3 - 2 $\dfrac{x^3}{(x^2+x+1)^2}=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)+1}{(x^2+x+1)^2}=\dfrac{x-1}{x^2+x+1}+\dfrac{1}{(x^2+x+1)^2}.$

一般に、$Q(x)$ が

$$(13\text{-}3\text{ c})\qquad \begin{gathered} Q(x)=(x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_s)^{m_s}\big((x-b_1)^2+c_1^2\big)^{n_1}\cdots\big((x-b_t)^2+c_t^2\big)^{n_t}, \\ (\text{但し、}a_i\ (i=1,\cdots,s),\ b_j,c_j\ (j=1,\cdots,t)\ \text{はすべて実数で、}c_j\neq 0) \end{gathered}$$

のように (お互いに共通因子を持たない) 多項式の積に因数分解されているならば、$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ は (13 - 3 a), (13 - 3 b) のような 2 種類の有理式

$$\frac{A}{(x-a)^k}\quad (a,A\in\mathbb{R},\ k=1,2,\cdots),\qquad \frac{Bx+C}{\big((x-b)^2+c^2\big)^l}\quad (b,c,B,C\in\mathbb{R},\ c\neq 0,\ l=1,2,\cdots)$$

の和に書き換えられる。そのように書き換えた表示を有理式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ の**部分分数展開**という。

例 13 - 3 - 3 有理式

$$\frac{2}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

を、与えられている分母の因数分解をもとに、部分分数展開する。すなわち、

$$\frac{2}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

となるような実数 A, B, C を求める。両辺に $(x+1)^2(x^2+1)$ を掛けると、

$$\begin{aligned} 2 &= A(x+1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)^2 \\ &= (A+C)x^3 + (A+B+2C+D)x^2 + (A+C+2D)x + (A+B+D) \end{aligned}$$

となる。この等式が多項式として成り立つには、

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B+2C+D=0 \\ A+C+2D=0 \\ A+B+D=2 \end{cases}$$

となることが必要十分である。この連立一次方程式を解く。

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&0&0 \\ 1&1&2&1&0 \\ 1&0&1&2&0 \\ 1&1&0&1&2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&0&0 \\ 0&1&1&1&0 \\ 0&0&0&2&0 \\ 0&1&-1&1&2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&0&0 \\ 0&1&1&1&0 \\ 0&0&0&2&0 \\ 0&0&-2&0&2 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&0&0 \\ 0&1&1&1&0 \\ 0&0&-2&0&2 \\ 0&0&0&2&0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&0&0 \\ 0&1&1&1&0 \\ 0&0&-1&0&1 \\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right)$$

より、

$$D=0,\ C=-1,\ B=1,\ A=1$$

とわかる。すなわち、

$$\frac{2}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{-x}{x^2+1}. \qquad \square$$

有理式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ について、もし、($P(x)$ の次数) $\geq$ ($Q(x)$ の次数) であれば、除法の定理 [補題 13 - 1 - 1] により、次のように変形することができる：

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

（$L(x)$ は多項式、$R(x)$ は 0 または ($R(x)$ の次数)<($Q(x)$ の次数) を満たす多項式）

したがって、有理式 $\frac{R(x)}{Q(x)}$ に対して、先程の部分分数展開を行うことができる。

例 13 - 3 - 4 有理式 $\dfrac{x^4+1}{x^2+2x+3}$ は分子の次数が分母の次数以上になっているので、分子を分母で割る。

$$x^4+1 = (x^2-2x+1)(x^2+2x+3) + 4x - 2$$

であるから、与えられた有理式は次のように書くことができる：

$$\frac{x^4+1}{x^2+2x+3} = (x^2-2x+1) + \frac{4x-2}{x^2+2x+3}.$$

$x^2+2x+3 = (x+1)^2+(\sqrt{2})^2$ より、この第 2 項はこのままで部分分数展開の形になっている。

● 13 - 4 : 有理関数の積分

有理式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ に対して、S を $Q(x) \neq 0$ であるような実数 x 全体からなる集合とすると、$x \in S$ を入力したときに実数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ を出力する関数が考えられる。このように、有理式を関数とみなしたものを**有理関数**と呼ぶ。有理関数は連続であるから、S に含まれる任意の閉区間 $[a, b]$ 上で積分可能である。

$Q(x)$ を (13 - 3 c) のように因数分解しておくと、

(13 - 4 a) $$\frac{P(x)}{Q(x)} = (\text{多項式}) + \left(\frac{A}{(x-a)^m},\ \frac{Bx+C}{((x-b)^2+c^2)^n} \text{ の形をした有理式の和} \right)$$

と書ける。したがって、$\frac{A}{(x-a)^m}$, $\frac{Bx+C}{((x-b)^2+c^2)^n}$ の形で与えられる有理関数の積分が求められれば、有理関数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ の積分も求められる。

- $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^m}dx$ の計算：

変数変換 $t = x - a$ を行って、

$$\int \frac{A}{(x-a)^m}dx = \begin{cases} -\dfrac{A}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C & (m \neq 1) \\ A \log|x-a| + C & (m = 1) \end{cases}$$

を得る。但し、C は積分定数を表わす。

- $\displaystyle\int \frac{Bx+C}{((x-b)^2+c^2)^n}dx$ $(c \neq 0)$ の計算：

$t = x - b$ と変数変換を行うと、

$$\int \frac{Bx+C}{((x-b)^2+c^2)^n}dx = \int \frac{B(t+b)+C}{(t^2+c^2)^n}dt = B\int \frac{t}{(t^2+c^2)^n}dt + (Bb+C)\int \frac{1}{(t^2+c^2)^n}dt$$

となる。ここで、第 1 項の積分は次のように計算される：

$$\int \frac{t}{(t^2+c^2)^n}dt = \begin{cases} -\dfrac{1}{2(n-1)(t^2+c^2)^{n-1}} + C_1 & (n \neq 1) \\ \dfrac{1}{2}\log(t^2+c^2) + C_1 & (n = 1). \end{cases}$$

但し、C_1 は積分定数を表わす。

第 2 項 $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(t^2+c^2)^n}dt$ の積分は前回示した漸化式

$$I_n = \frac{1}{c^2}\left\{ \frac{t}{(2n-2)(t^2+c^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} \right\} \qquad (n > 1),$$

$$I_1 = \frac{1}{c}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{t}{c}\right) + C_2 \qquad (C_2 \text{ は積分定数})$$

を用いて計算することができる。

以上のようにして、有理関数の不定積分は原理的にはすべて求められる。

2026 年 7 月 2 日

数学を学ぶ（微分積分 1）第 13 回・学習内容チェックシート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
多項式 $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ の次数とは？	p.	
2 つの多項式 $P(x)$ と $Q(x)$ が等しいとは？	p.	
有理式とは？	p.	
2 つの有理式 $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ と $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ が等しいとは？	p.	
有理関数とは？	p.	

Q2. 次の $\boxed{}$ に適当な記号や数字・文字などを入れなさい。

- $P(x)$ が 7 次式で、$Q(x)$ が 3 次式のとき、$P(x)$ を $Q(x)$ で割ったときの商の次数は $\boxed{}$ 以下であり、$P(x)$ を $Q(x)$ で割ったときの余りは $\boxed{}$ になるかまたは $\boxed{}$ 次以下の多項式である。この商と余りは、$P(x)$ から $a_kx^kQ(x)$ (a_k は実数) という形の多項式を次数が減るように次々と引いていけば求められる。
- 有理式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ において、($P(x)$ の次数) $<$ ($Q(x)$ の次数) が成り立っているとする。$Q(x)$ が 1 次多項式と (実数解を持たない) 2 次多項式の積の形に因数分解されていれば、$\frac{P(x)}{Q(x)}$ は次の 2 種類の形をしたいくつかの有理式の和の形に書き換えることができる。

  (A) $\boxed{}$ (B) $\boxed{}$

  その表示を有理式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ の $\boxed{}$ と呼ぶ。

  (A), (B) の形で与えられる有理関数の不定積分は公式を使って計算することができる。

Q3. 有理式 $\frac{dx+k}{(x-a)((x-b)^2+c^2)^2}$ (但し、a, b, c, d, k は実数の定数で、$c \neq 0$) の部分分数展開を求めるにはどうすればよいですか。その解決方法・手順を書きなさい。

$\boxed{}$

Q4. 第 13 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。