§13. 重積分の変数変換公式

前節では、一次変換という特殊な座標変換について、重積分の変数変換公式を導いた。この節では、一般の座標変換について、重積分の変数変換公式を導く。特に、極座標変換の場合に、その使い方を説明する。

一次変換の重積分の変数変換公式には行列式が登場するが、一般の場合にそれに相当するのは、偏微分係数を並べた行列の行列式—ヤコビアン—である。そこで、まず、ヤコビアンの定義とその幾何学的性質を説明することにしよう。

● 13 - 1 : C^1-級写像

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 U の各点 (u,v) に対して、$\mathbb{R}^2$ の点を 1 つずつ定める対応規則 F のことを、U から $\mathbb{R}^2$ への**写像**といい、これを $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ のように表わす。$(u,v) \in U$ に対応づけられている $\mathbb{R}^2$ の点 $F(u,v)$ は、

(13 - 1 a)
$$F(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$$

のように表わされる。ここで、$\varphi(u,v), \psi(u,v)$ は U 上で定義された 2 つの関数である。

写像 F が C^1**-級**であるとは、U が $\mathbb{R}^2$ の開集合であって、φ および ψ が C^1-級であるときをいう。ここで、U 上で定義された関数 $f(u,v)$ が C^1-級であるとは、u, v に関して偏微分可能であって、偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ が連続のときをいう。

例 13 - 1 - 1 (1) $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ を定数とする。

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad F(u,v) = (au + bv, cu + dv)$$

は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への C^1-級写像である。

(2) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への C^1-級写像である。

● 13 - 2 : ヤコビアン

開集合 U 上で定義された C^1-級写像

(13 - 2 a)
$$F : U \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad F(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$$

と点 $(a,b) \in U$ に対して、2 次正方行列

(13 - 2 b)
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(a,b) & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(a,b) \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial u}(a,b) & \dfrac{\partial \psi}{\partial v}(a,b) \end{pmatrix}$$

の行列式を**ヤコビアン** (Jacobian) といい、$J_F(a,b)$ で表わす：

(13 - 2 c)
$$J_F(a,b) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a,b)\frac{\partial \psi}{\partial v}(a,b) - \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a,b)\frac{\partial \psi}{\partial u}(a,b).$$

例 13 - 2 - 1 [例 13 - 1 - 1(1)] の写像 F について、点 (u,v) におけるヤコビアンは

(13 - 2 d)
$$J_F(u,v) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

[例 13 - 1 - 1(2)] の写像 F について、点 (r,θ) におけるヤコビアンは

(13 - 2 e)
$$J_F(r,\theta) = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$$

● 13 - 3 : ヤコビアンの幾何学的な意味

座標軸に平行な辺からなる、U に含まれる微小長方形 R とそれを F で写した像 $F(R)$ との面積比を求めよう。R の頂点を

$$\mathrm{A}_1(a,b),\ \mathrm{A}_2(a+\Delta u,b),\ \mathrm{A}_3(a,b+\Delta v),\ \mathrm{A}_4(a+\Delta u,b+\Delta v)$$

とおく ($\Delta u,\ \Delta v$ は R の 1 辺の長さ) と、

(13 - 3 a) $$R=\{\ (a+s\Delta u,\ b+t\Delta v)\mid 0\le s,t\le 1\ \}$$

と表わせる。このとき、R を F で写した像 $F(R)$ は

$$F(R)=\{\ \big(\varphi(a+s\Delta u,b+t\Delta v),\ \psi(a+s\Delta u,b+t\Delta v)\big)\mid 0\le s,t\le 1\ \}$$

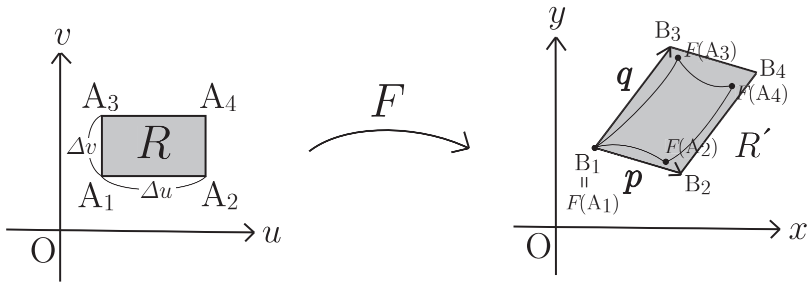
となる。ここで、$\varphi,\ \psi$ を (a,b) のまわりで第 1 次テイラー展開して、$\dfrac{\partial\varphi}{\partial u},\dfrac{\partial\varphi}{\partial v},\dfrac{\partial\psi}{\partial u},\dfrac{\partial\psi}{\partial v}$ が連続であることを用いると、$F(R)$ は

$$R'=\{\ F(\mathrm{A}_1)+s\mathbf{p}+t\mathbf{q}\mid 0\le s,t\le 1\ \}$$

で近似されることがわかる。但し、

$$\mathbf{p}=\Big(\Delta u\frac{\partial\varphi}{\partial u}(a,b),\Delta u\frac{\partial\psi}{\partial u}(a,b)\Big),\qquad \mathbf{q}=\Big(\Delta v\frac{\partial\varphi}{\partial v}(a,b),\Delta v\frac{\partial\psi}{\partial v}(a,b)\Big)$$

である。



$\mathbf{p},\mathbf{q}$ が平行でないときには、R' は

(13 - 3 b)
$$\mathrm{B}_1=F(\mathrm{A}_1)=(\varphi(a,b),\ \psi(a,b)),\qquad \mathrm{B}_2=F(\mathrm{A}_1)+\mathbf{p},$$
$$\mathrm{B}_3=F(\mathrm{A}_1)+\mathbf{q},\qquad \mathrm{B}_4=F(\mathrm{A}_1)+\mathbf{p}+\mathbf{q}$$

を頂点とする平行四辺形である。(12 - 3 b) より、R' の面積 $\mu(R')$ は

$$\mu(R')=\left|\Delta u\frac{\partial\varphi}{\partial u}(a,b)\cdot\Delta v\frac{\partial\psi}{\partial v}(a,b)-\Delta v\frac{\partial\varphi}{\partial v}(a,b)\cdot\Delta u\frac{\partial\psi}{\partial u}(a,b)\right|=|J_F(a,b)|\mu(R)$$

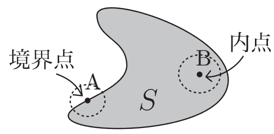
で与えられる。以上の考察から、$\mathbf{p},\mathbf{q}$ が平行でないとき、つまり、$J_F(a,b)\neq 0$ のとき、

(13 - 3 c) $$(F(R)\ \text{の面積})\fallingdotseq|J_F(a,b)|\times(R\ \text{の面積})$$

となることがわかった。

● 13 - 4 : 座標変換 (変数変換)

S を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とする。$(a,b) \in S$ が S の**内点**であるとは、$\varepsilon > 0$ を十分小さくとると、(a,b) の ε-近傍 $U_\varepsilon(a,b)$ が S に含まれるときをいう。S の内点全体からなる集合を S の**内部**という。S から内部をとり除いた部分を S の**境界**と呼ぶ。



$F : S \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合 S から $\mathbb{R}^2$ への写像とする。S の部分集合 E に対して $F(E)$ を

(13 - 4 a) $$F(E) = \{\ F(u,v) \mid (u,v) \in E\ \}$$

と定義し、F による E の**像**という。

E, D を $\mathbb{R}^2$ の面積確定有界閉集合とする。$\mathbb{R}^2$ の開集合 U 上で定義された C^1-級写像 $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ が E から D への**座標変換** (あるいは、変数変換) を定めるとは、以下の 2 条件が満たされるときをいう。

① F は E の内部の上では D の内部への単射である。すなわち、F は E の内点を D の内点に写し、 E の相異なる 2 つの内点を D の相異なる内点に写す。

② $F(E) = D$ である。すなわち、D の任意の点 (x,y) に対して、$F(u,v) = (x,y)$ となる E の点 (u,v) が存在する。

例 13 - 4 - 1 [例 13 - 1 - 1](2) の C^1-級写像

(13 - 4 b) $$F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \qquad ((r,\theta) \in \mathbb{R}^2)$$

は、$E = \{\ (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi\ \}$ から $D = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4\ \}$ への座標変換を定める。

一般に、(13 - 4 b) で与えられる C^1-級写像 F は、$\{\ (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r \ge 0,\ \theta \in \mathbb{R}\ \}$ に含まれる任意の面積確定有界閉集合 E を面積確定有界閉集合 $F(E)$ に写す。(13 - 4 b) の C^1-級写像 F によって与えられる座標変換のことを**極座標変換**という。

● 13 - 5 : 重積分の変数変換公式

第 11 節で導いた変数変換公式 (12 - 4 c) と類似の公式が、より一般の C^1-級写像 F に対して成り立つ。すなわち、

定理 13 - 5 - 1 (変数変換公式)
D を面積確定有界閉集合、$f(x,y)$ を D 上で定義された連続関数とする。また、$F : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ のある開集合 U 上で定義された C^1-級写像であって、U に含まれるある面積確定有界閉集合 E から D への座標変換であるとする。E の任意の内点 (a,b) において $J_F(a,b) \neq 0$ であれば、次の公式が成り立つ：

(13 - 5 a) $$\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_E f(F(u,v))|J_F(u,v)|\,dudv.$$

(**証明の概略**)

E を座標軸に平行な直線によって分割する。但し、E と交わる小長方形領域 R_{ij} はどれも U に含まれるくらいに細かく分割しておく。すると、D はこのような小長方形領域の像 $D_{ij} = F(R_{ij})$ により分割される。E, D のこのような分割をそれぞれ、$\Delta,\ F(\Delta)$ とおく。

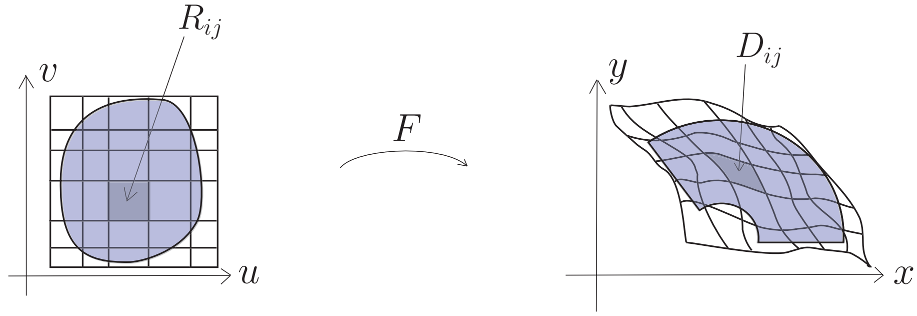
F は E の内点を D の内点に写していて、E の相異なる内点を D の相異なる内点に写しているので、D_{ij} たちは境界以外で重なることはない。したがって、D_{ij} の中から一点 $\xi_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$ を選んで、和

(13 - 5 b) $$S(f, F(\Delta)) = \sum_{i,j} f(x_{ij}, y_{ij})\mu(D_{ij})$$

を作り、分割 Δ を細かくしていくと (分割 $F(\Delta)$ も細かくなるので)、和 (13 - 5 b) は

(13 - 5 c) $$\int_D f(x,y)\, dxdy$$

に収束する。



一方、$(x_{ij}, y_{ij}) = F(u_{ij}, v_{ij})$ とおくと、(13 - 3 c) により、和 (13 - 5 b) は

(13 - 5 d) $$S(f \circ F, \Delta) = \sum_{i,j} f(F(u_{ij}, v_{ij}))|J_F(u_{ij}, v_{ij})|\mu(R_{ij})$$

によって近似され、分割 Δ を細かくすればするほど、近似の精度は高くなる。和 (13 - 5 d) は、$|\Delta| \to 0$ とすると、

(13 - 5 e) $$\int_E f(F(u,v))|J_F(u,v)|\, dudv$$

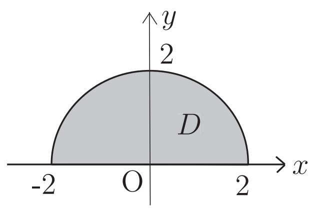
に収束するから、等式 (13 - 5 a) が得られた。 □

● 13 - 6 : 極座標変換による重積分の計算

(13 - 4 b) によって定義される C^1-級写像 F の任意の点 (r, θ) におけるヤコビアンは $J_F(r, \theta) = r$ であった。したがって、[定理 13 - 5 - 1] より次を得る：

面積確定有界閉集合 E が面積確定有界閉集合 D に極座標変換により写されるとき、D 上で定義された連続関数 $f(x, y)$ に対して、

(13 - 6 a) $$\int_D f(x,y)\, dxdy = \int_E f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, drd\theta.$$



<u>**例 13 - 6 - 1**</u> $D = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0\ \}$ とするとき、重積分 $\int_D x^2 y\, dxdy$ の値は、

$E = \{\ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq \pi\ \}$

とおくと、極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ (r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ によって、E は D に写されることから、

$$\int_D x^2 y\, dxdy = \int_E (r\cos\theta)^2 \cdot r\sin\theta \cdot r\, drd\theta = \int_0^2 r^4 \left\{ \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta \right\} dr = \cdots = \frac{64}{15}. \quad \square$$

2025年12月17日

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎２）第13回・学習内容チェックシート

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
関数 $f(u,v)$ が C^1-級であるとは？	p.	
C^1-級写像 $F(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$ の点 (a,b) におけるヤコビアン $J_F(a,b)$ とは？	p.	

Q2. 次の $\boxed{}$ に適当な言葉や数式を入れなさい。

- $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合 U 上で定義された C^1-級写像とする。$J_F(a,b) \neq 0$ のとき、(a,b) を頂点の 1 つとする U に含まれる微小長方形 R を F で写したものの面積 $\mu(F(R))$ は、
$$\mu(F(R)) \fallingdotseq \boxed{} \times \mu(R)$$
により近似的に求められる。
- 面積確定有界閉集合 E が面積確定有界閉集合 D に極座標変換により写されるとき、D 上で定義された連続関数 $f(x,y)$ に対して、重積分の極座標変換公式
$$\int_D f(x,y)\,dxdy = \boxed{}$$
が成り立つ。
- 面積確定有界閉集合 D が $D = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ ax + by \geq 0,\ cx + dy \geq 0\ \}$ のような扇形をしているときには、上の変換公式を使って、D 上で定義された連続関数 $f(x,y)$ の重積分 $\int_D f(x,y)dxdy$ を求めることができる。そのためには、極座標変換
$$F(r,\theta) = \boxed{}$$
の下で $F(E) = D$ となるような長方形領域 E を求めることができればよい。このような E を求めるには、まず、D を (x,y)-座標平面上に描き、次に、$x = \boxed{}$, $y = \boxed{}$ とおいて、(x,y) が D 内を自由に動くとき、r と θ がどのような範囲を動くのかを調べればよい。

Q3. 第13回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。