# §14. 定積分の計算方法

この節では、高校の数学 III で学ぶ定積分の計算方法を復習する。定積分の定義を説明したのち、微積分学の基本定理を利用した定積分の計算方法を学ぶ。

### ● 14 - 1：リーマン和と定積分の定義

閉区間 $[a,b]$ の**分割**とは、$a$ から始まって $b$ で終わる狭義単調増加な有限数列

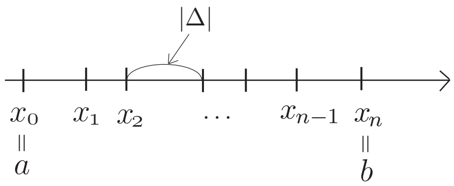
(14 - 1 a) $$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

のことをいう。各 $x_i$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ を分割 $\Delta$ の**分点**と呼び、

(14 - 1 b) $$|\Delta| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \cdots, x_n - x_{n-1}\}$$

を分割 $\Delta$ の**細かさ**と呼ぶ。ここで、max は最大なものを表わす記号である。

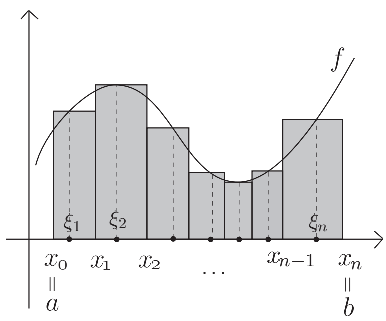
閉区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta$ に、いくつか分点を追加することにより得られる $[a,b]$ の新しい分割のことを $\Delta$ の**細分**という。追加する分点が 1 個だけの場合には、$\Delta$ の初等細分と呼ぶ。$\Delta$ の任意の細分は、初等細分を有限回繰り返すことにより得ることができる。




$f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ を定義域に含む関数とする。$[a,b]$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ と、各区間 $[x_{i-1}, x_i]$ から任意に一点 $\xi_i$ を取って作った有限数列 $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n$ に対して、実数

(14 - 1 c) $$S(f; \Delta, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

を分割 $\Delta$ とそれにフィットする有限数列 $\xi$ に関する $f(x)$ の**リーマン和**という。




$N \to \infty$ のとき $|\Delta^{(N)}| \to 0$ となるように $\Delta$ を細分していって $[a,b]$ の分割の列 $\Delta = \Delta^{(0)}, \Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \cdots\cdots$ を作り、各 $\Delta^{(N)}$ に対してそれにフィットする有限数列 $\xi^{(N)}$ を選んでリーマン和 $S(f; \Delta^{(N)}, \xi^{(N)})$ を作るとき、リーマン和からなる数列 $\{S(f; \Delta^{(N)}, \xi^{(N)})\}_{N=1}^{\infty}$ が

① $\Delta$ の細分の仕方
② 各細分にフィットする有限数列の選び方
③ 最初の分割 $\Delta$ とそれにフィットする有限数列 $\xi$ の取り方

によらずにある値 $\gamma$ に限りなく近づいていくならば、関数 $f(x)$ は $[a,b]$ 上で (リーマン) **積分可能**であるといい、$\gamma$ を $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ によって表わす：

$$\gamma = \int_a^b f(x)dx.$$

証明はしないが、次の結果が成り立つ。

**定理 14 - 1 - 1**

$[a,b]$ 上で連続な関数は積分可能である。$[a,b]$ 上で連続でなくても、不連続な点が有限個であれば、やはり、積分可能である。

## ● 14 - 2 : 微積分学の基本定理を利用した定積分の計算

微分と積分は定義の仕方が全く違うにも関わらず、実は互いに逆操作になっている。

$$f(x) \longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt \longmapsto F'(x) = f(x)$$

(元に戻る)

$$f(x) \longmapsto f'(x) \longmapsto F(x) = \int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$$

(定数項のずれを除くと元に戻る)

**定理 14 - 2 - 1 (微積分学の基本定理)**

$f(x)$ を開区間 $I$ 上で定義された連続関数とし、$c \in I$ を固定する。このとき、関数

(14 - 2 a) $$F(x) = \int_c^x f(t)dt \quad (x \in I)$$

は微分可能であり、その導関数 $F'(x)$ は $f(x)$ に一致する：$F'(x) = f(x) \ \ (x \in I)$.

$f(x)$ を開区間 $I$ 上で定義された連続関数とする。$c \in I$ を固定して、関数 $G(x)$ $(x \in I)$ を

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt \quad (x \in I)$$

と定める。微積分学の基本定理により、$F(x)$ $(x \in I)$ は微分可能で、$G'(x) = f(x)$ を満たす。したがって、$F(x)$ $(x \in I)$ は $f(x)$ $(x \in I)$ の 1 つの原始関数である。よって、定積分は次の公式で求められる：任意の $a, b \in I$ に対して

(14 - 2 b) $$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

**注意**：積分の計算では、$F(b) - F(a)$ をしばしば記号 $[F(x)]_a^b$ と表わされる。

**例 14 - 2 - 2** $\alpha \in \mathbb{R}$ とする。冪関数 $f(x) = x^\alpha$ $(x > 0)$ の原始関数の 1 つは

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} & (\alpha \neq -1 \text{ のとき}) \\ \log x & (\alpha = -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。したがって、$a, b > 0$ に対して、

(14 - 2 c) $$\int_a^b x^\alpha dx = F(b) - F(a) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) & (\alpha \neq -1 \text{ のとき}), \\ \log\left(\frac{b}{a}\right) & (\alpha = -1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

## ● 14 - 3 : 定積分の性質

連続関数の定積分は以下の性質を持つ。

**定理 14 - 3 - 1**

$f(x), g(x)$ を定義域の中に閉区間 $[a, b]$ を含む連続関数とする。このとき、

(1) (**線形性**)

(i) $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

(ii) 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して、$\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$

(2) (**単調性**) 任意の $x \in [a, b]$ に対して $f(x) \leq g(x)$ ならば、

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

(3) (**加法性**) $a < c < b$ を満たす任意の実数 $c$ に対して、

(14 - 3 a) $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

## ● 14-4：定積分の定義の拡張

これまでは、$a<b$ のときのみ積分 $\int_a^b f(x)dx$ を考えたが、$a>b$ や $a=b$ の場合にも積分 $\int_a^b f(x)dx$ を考えることができる。これらは次のように定義される。

$$a>b \text{ のとき、}\quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$
$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

このように定義すると、等式 (14-3 a) は ($a,b,c$ の大小関係に無関係に) すべての実数 $a,b,c$ について成り立つ。

## ● 14-5：部分積分法

不定積分の部分積分法から次の公式を得る。

**定理 14-5-1 (部分積分法（定積分版）)**

$f(x),\ g(x)$ を開区間 $I$ 上で定義された関数とし、$I$ 上で $f(x)$ は連続、$g(x)$ は微分可能で、その導関数 $g'(x)$ は連続であるとする。$F(x)$ $(x\in I)$ を関数 $f(x)$ $(x\in I)$ の原始関数とすると、任意の $a,b\in I$ に対して、次の公式が成り立つ：

(14-5 a)
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

**例 14-5-2** $n$ を 0 以上の整数として、

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$$

とおく。$n>1$ に対して、

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\cdot \sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\cdot(-\cos x)'\,dx \\
&= \left[-\sin^{n-1} x\cdot\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x\cdot\cos^2 x\,dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx \\
&= (n-1)(I_{n-2}-I_n)
\end{aligned}$$

となる。したがって、

(14-5 b)
$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad (n>1)$$

が成り立つ。直接計算により、$I_0 = \frac{\pi}{2},\ I_1 = 1$ がわかるから、(14-5 b) を用いて 0 以上の任意の整数 $n$ に対して $I_n$ の値が求まる。

## ● 14-6：置換積分法

$f(x),\ \varphi(t)$ をそれぞれ開区間 $I,\ J$ 上で定義された関数であって、$f(x)$ は連続、$\varphi(t)$ は微分可能で、その導関数 $\varphi'(t)$ は連続であるとする。関数 $f(x)$ と関数 $\varphi(t)$ は合成可能であるとき、$F(x)$ $(x\in I)$ を $f(x)$ $(x\in I)$ の原始関数とすると、(13-5 b) より、任意の $a,t\in J$ に対して

(14-6 a)
$$F(\varphi(t)) + C = \int_a^t f(\varphi(T))\varphi'(T)\,dT$$

が成り立つ。ここで、$C$ はある定数である。$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数であるから、$p\in I$ を固

定すると

(14 - 6 b) $$F(x) = \int_p^x f(X)dX$$

のように表わされる。(14 - 6 a) と (14 - 6 b) より、

(14 - 6 c) $$\int_p^{\varphi(t)} f(X)dX + C = \int_a^t f(\varphi(T))\varphi'(T)\,dT$$

が得られる。$t = a$ を代入して $C = \int_{\varphi(a)}^p f(X)dX$ であることがわかるから、(14 - 6 c) の左辺は $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(t)} f(X)dX$ と書き換えられる。以上より、次の公式を得る。

**定理 14 - 6 - 1 (置換積分法（定積分版）)**

$f(x)$, $\varphi(t)$ をそれぞれ開区間 $I$, $J$ 上で定義された関数とし、$f(x)$ は連続、$\varphi(t)$ は微分可能で、その導関数 $\varphi'(t)$ は連続であるとする。関数 $f(x)$ と関数 $\varphi(t)$ が合成可能であるとき、任意の $a, b \in J$ に対して次の公式が成り立つ：

(14 - 6 d) $$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

置換積分法を用いて $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ を計算するには、$x$ を $t$ の関数 $\varphi(t)$ $(t \in J)$ で表わして、$\alpha = \varphi(a)$ となる $a \in J$ と $\beta = \varphi(b)$ となる $b \in J$ を求めてから公式 (14 - 6 d) を適用することになる。しかし、実際の場面では次の手順を踏むことが多い。

(i) $f(x)$ の式の一部分 (それを仮に $g(x)$ としよう) を文字 $t$ で置き換える、つまり、$t = g(x)$ のようにおく。

(ii) 次に、$x$ が $\alpha$ から $\beta$ まで動くとき、$t$ がどこからどこまで動くのかを調べる (仮に $a$ から $b$ まで動いたとしよう)。

(iii) 次に、$\frac{dt}{dx} = g'(x)$ を計算し、(積分区間 $[\alpha, \beta]$ を含むある開区間 $I$ において $g'(x)$ が 0 の値を取らないことを確認し、) $f(x)\frac{1}{g'(x)}$ を $t$ だけの式に書き換える。

(iv) (iii) で得られた $t$ だけの「式」を $a$ から $b$ まで積分する。

**注意：**(iv) で得られた値は定積分 $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ の値に一致する。なぜなら、$g'(x) \neq 0$ なので、逆関数定理により、関数 $g(x)$ $(x \in I)$ は微分可能な逆関数を持つ。その逆関数が [定理 14 - 6 - 1] の $x = \varphi(t)$ になるからである。

**例 14 - 6 - 2** 定積分 $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{3-x}}dx$ を求めよ。

**解；**

$t = \sqrt{3-x}$ とおくと、

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2}(3-x)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}t^{-1}$$

| $x$ | $0$ | $\to$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $t$ | $\sqrt{3}$ | $\to$ | $1$ |

である。これより、$\varepsilon > 0$ を十分小さくとると、$x$ が $[0, 2]$ を含む開区間 $I = (0 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$ の中を動くとき $\frac{dx}{dt} < 0$ (定符号) となるので、この開区間 $I$ において $x$ を $t$ の関数 $\varphi(t)$ で表わすことができる。実際、$x = 3 - t^2$ と表わすことができる。

したがって、

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{3-x}}dx = \int_{\sqrt{3}}^1 \frac{3-t^2}{t} \cdot -2t\,dt = 2\int_1^{\sqrt{3}} (3-t^2)\,dt = 2\Big[3t - \frac{1}{3}t^3\Big]_1^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - \frac{8}{3}.$$