§14. ネイピアの数 e と円周率 π

この節では、特別な 2 つの実数 e と π を数列の極限として定義する。

● 14-1：ネイピアの数

自然対数の底 2.718281828459..... を e という記号で表わした人物は、オイラー (Euler, 1707–1783) であるが、この数 e は、対数の発見者ネイピア (Napier, 1550–1617) の名前に因んで、ネイピアの数と呼ばれている。ここでは、ネイピアの数を実数の連続性に基づいて定義する。

定理 14-1-1

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

とおく。このとき、数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は同じ値に収束する。その極限を e と書き、**ネイピアの数** (Napierian number) と呼ぶ：

(14-1 a)
$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

上の定理の証明のために、二項定理を用いる。

補題 14-1-2

0 以上の整数 n と $0 \leq k \leq n$ を満たす整数 k に対して、

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

と定める。これを**二項係数** (binomial coefficient) と呼ぶ。次が成り立つ。

(1) $n \in \mathbb{N}$ および $k \in \{1, \ldots, n\}$ に対して

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

(2) (**二項定理**) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ および任意の自然数 n に対して

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

(**証明**)

(1)
$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!\big(k + (n-k+1)\big)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

(2) $a+b$ のコピーを n 個用意して、それを $X_1, \ldots, X_n$ とおく。$(a+b)^n = X_1 \cdots X_n$ と書ける。$(a+b)^n$ を展開したときの $a^k b^{n-k}$ の係数は、$X_1, \ldots, X_n$ から k 個選ぶ選び方の総数 $\binom{n}{k}$ に等しい (選んだ k 個については a を、そうでない $n-k$ 個については b を "取り出して" 掛け算すると $a^k b^{n-k}$ になる)。厳密には (1) を用いて、n に関する帰納法で証明される (詳細は演習問題として残す)。 □

(**[定理 14-1-1] の証明**)

次の①, ②を示せばよい。

① $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n < a_{n+1}$ および $a_n \leq b_n$ が成り立つ。

② $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である。

③ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

①の証明：

$a_n < a_{n+1}$ は次のように示される：

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{n-k+1}{n}\cdot\frac{n-k+2}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n} \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{0}{n}\right) \\
&\le 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\left(1-\frac{k-2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{0}{n+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k \\
&< \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}.
\end{aligned}$$

$a_n \le b_n$ は次のように示される：

$$a_n = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{0}{n}\right) \le 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = b_n.$$

②の証明：

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界であることは例 11-7 で証明済みである。$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界であることは、$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界であることと①の 2 番目の不等式から得られる。

③の証明：

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は①の 1 番目の不等式と②より上に有界な単調増加列である。したがって、収束する。その極限を α とおく。$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はその定義から単調増加列であり、②より上に有界である。したがって、収束する。その極限を β とおく。

$\alpha=\beta$ を示す。①の 2 番目の不等式から $\alpha \le \beta$ である。

$\beta \le \alpha$ を示す。そのためには、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $b_n \le \alpha$ となることを示せばよい。①における $a_n < a_{n+1}$ の証明と同様にして $m > n$ を満たすすべての $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1}{m}\right)\left(1-\frac{k-2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{0}{m}\right) < a_m$$

となることがわかる。ここで、両辺の極限 $\lim_{m\to\infty}$ をとれば、$b_n \le \alpha$ が得られる。

これで、$\alpha=\beta$ が示された。 □

演習 14-1* $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2 < 1+\frac{2}{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^2$ を確認し、極限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^n$ を求めよ。

● 14-2：円周率

ここでは、寺澤順『π と微積分の 23 話』の第 1 話に沿いながら、円周率 π の定義を与える。

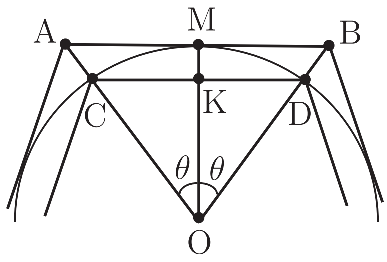
k を 3 以上の整数とし、単位円に内接する正 k 角形 P_k と外接する正 k 角形 Q_k を考える。P_k, Q_k の辺の長さの総和をそれぞれ p_k, q_k とおく。p_k, q_k と p_{2k}, q_{2k} を比較する。A, B を Q_k の隣り合う頂点とし、C, D を P_k の隣り合う頂点とすると、

$$p_k = k\cdot \mathrm{CD}, \qquad q_k = k\cdot \mathrm{AB}$$

となる。点 A, B の中点を M とすると、M において辺 AB は単位円に接している。$\theta = \angle\mathrm{AOM}$ とする。但し、O は単位円の中心である。A, B, C, D を図のような位置関係にとっておくと、

$$\mathrm{AB} = 2 \cdot \mathrm{AM} = 2\tan\theta, \qquad \mathrm{CD} = 2\sin\theta$$

となる。



よって、

(14-2 a) $$p_k = 2k\sin\theta, \qquad q_k = 2k\tan\theta$$

を得る。同様に P_{2k}, Q_{2k} の辺の長さを計算して、

(14-2 b) $$p_{2k} = 4k\sin\frac{\theta}{2}, \qquad q_{2k} = 4k\tan\frac{\theta}{2}$$

となることがわかる。

$$t := \tan\frac{\theta}{2}$$

とおくと、ここで、

$$0 < \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 2\frac{1}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

より、$1 - t^2 > 0$ であって、

$$\tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \sin\frac{\theta}{2} = t\cos\frac{\theta}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

となる。よって、

(14-2 c) $$p_k = \frac{4kt}{1+t^2}, \qquad q_k = \frac{4kt}{1-t^2}$$

(14-2 d) $$p_{2k} = \frac{4kt}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad q_{2k} = 4kt$$

を得る。よって、

(14-2 e) $$p_k \leq p_{2k} \leq q_{2k} \leq q_k$$

である。ここで、

$$q_{2k} - p_{2k} = \frac{4kt(\sqrt{1+t^2}-1)}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad q_{2k} + p_{2k} = \frac{4kt(\sqrt{1+t^2}+1)}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$q_k - p_k = \frac{4kt \cdot 2t^2}{1-t^4}, \qquad q_k + p_k = \frac{4kt \cdot 2}{1-t^4}$$

であるから、

$$(q_{2k} - p_{2k})(q_{2k} + p_{2k}) = \frac{(4kt)^2 t^2}{1+t^2}, \qquad q_k - p_k = t^2(q_k + p_k)$$

となる。よって、

$$(q_{2k} - p_{2k})(q_{2k} + p_{2k}) = q_{2k}p_k t^2 = q_{2k}p_k\frac{q_k - p_k}{q_k + p_k}$$

を得る。故に、(14 - 2 e) より

(14 - 2 f) $$q_{2k} - p_{2k} = \frac{q_{2k}p_k}{(q_k + p_k)(q_{2k} + p_{2k})}(q_k - p_k) \leq \frac{q_k^2}{4p_k}(q_k - p_k)$$

を得る。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、

(14 - 2 g) $$x_n := p_{6\cdot 2^{n-1}}, \qquad y_n := q_{6\cdot 2^{n-1}}$$

とおく。このとき、(14 - 2 e) より任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n$ となるので、

(14 - 2 h) $$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots\cdots \leq y_{n+1} \leq y_n \leq \cdots \leq y_2 \leq y_1$$

が成り立つ。故に、$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加列であり、$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界な単調減少列なので、ともに収束する。さらに、(14 - 2 f) と、$x_1 \leq x_n,\ y_n \leq y_1$ より、

$$y_{n+1} - x_{n+1} \leq \frac{y_1^2}{4x_1^2}(y_n - x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$$

となる。ここで、

$$x_1 = p_6 = 2 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ = 6,$$
$$y_1 = q_6 = 2 \cdot 6 \cdot \tan 60^\circ = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

となるので、

(14 - 2 i) $$y_{n+1} - x_{n+1} \leq \frac{1}{3}(y_n - x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$$

を得る。これより、

$$0 < y_n - x_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(y_1 - x_1)$$

であるから、$\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$ を得る。こうして、$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n$ となることがわかった。

得られた結果を定理としてまとめておく。

定理 14 - 2 - 1

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して単位円に内接する正 $6 \cdot 2^{n-1}$ 角形の辺の長さの総和を x_n とし、単位円に外接する正 $6 \cdot 2^{n-1}$ 角形の辺の長さの総和を y_n とする。このとき、数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は同じ値に収束する。その値の半分を π と書き、**円周率**と呼ぶ：

$$2\pi = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

演習 14- 2 (14 - 2 g) のように x_n, y_n を定めると、

$$x_{n+1} = \sqrt{y_{n+1}x_n}, \quad y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$$

が成り立つことを示せ。