§14. 固有値・固有ベクトル

この節では、固有値問題の例として「うわさの広まり方」を取り上げながら、行列の固有値、固有ベクトルの意味、有用性を説明する。固有値、固有ベクトルは、本来、複素数の範囲内で扱われるべきものであるが、この講義では実数の範囲に限定する。

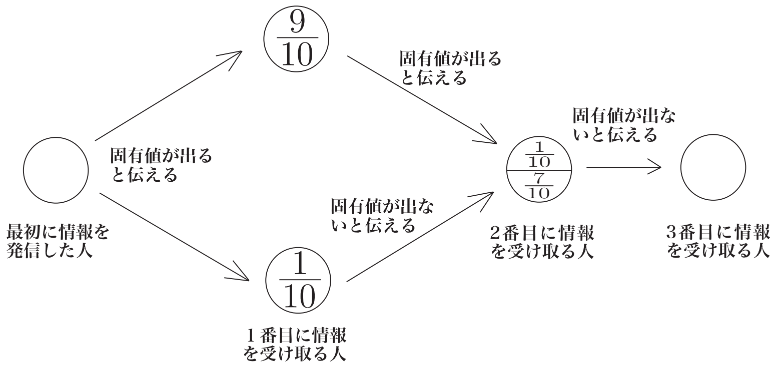
● 14 - 1 : 固有値問題 (マルコフ連鎖)

固有値問題の典型的で、かつ、応用上重要な例にマルコフ連鎖がある。うわさの広まり方に関する例を用いてこれを説明する。次のような情報の伝わりかたをする社会を想定しよう。

今度の試験の問題に「固有値が出る」と聞いた人が、他人にも「固有値が出る」と伝える確率が $\frac{9}{10}$ で、反対に「固有値はでない」と伝える確率は $\frac{1}{10}$ である。さらに、「固有値が出ない」と聞いた人が、他人に「固有値が出る」と伝える確率が $\frac{3}{10}$ で、「固有値が出ない」と伝える確率が $\frac{7}{10}$ である。このような情報の伝わり方は次のような行列で表わすことができる。

$$\begin{array}{cc} & \text{情報を送る側} \\ & \begin{array}{cc} \text{固有値が出る} & \text{固有値が出ない} \end{array} \\ \text{情報を受ける側} \begin{array}{c} \text{固有値が出る} \\ \text{固有値が出ない} \end{array} & \begin{pmatrix} \dfrac{9}{10} & \dfrac{3}{10} \\ \dfrac{1}{10} & \dfrac{7}{10} \end{pmatrix} = A \end{array}$$

行列 $A^2 = AA$ の $(2,1)$-成分は次のような確率を表わしている。



図：A^2 の (2,1) - 成分の意味

$$A^2 \text{ の } (2,1)\text{-成分} = \begin{array}{c} \text{ある人が「固有値が出る」と他人に伝えたとき、その人から数えて} \\ \text{2 番目に情報を受け取る人が他人に「固有値が出ない」と伝える確率} \end{array}$$

一般に、A の m 乗 $A^m = \overbrace{AA\cdots\cdots A}^{m\text{ 個}}$ を $A^m = \begin{pmatrix} p_{11}(m) & p_{12}(m) \\ p_{21}(m) & p_{22}(m) \end{pmatrix}$ とおくと、その各成分 $p_{ij}(m)$ は以下のような意味を持つことがわかる：

$$p_{ij}(m) = \left(\begin{array}{l} \text{その社会の中のある人が} \left\{ \begin{array}{l} \text{「固有値が出る」}(j=1) \\ \text{「固有値が出ない」}(j=2) \end{array} \right\} \text{と} \\ \text{情報を発したとき、} m \text{ 番目に情報を受け取る人が、他人に} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{「固有値が出る」}(i=1) \\ \text{「固有値が出ない」}(i=2) \end{array} \right\} \text{と伝える確率} \end{array} \right)$$

● 14 - 2 : A^m を計算するには

仮に、

(14 - 2 a) $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

となるような正則行列 P と実数 λ_1, λ_2 が見つかったとしよう。すると、A^m は

$$A^m = P \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_2^m \end{pmatrix} P^{-1}$$

のようにして求めることができる。

$P = (\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2)$ と書くと、

$$\begin{aligned} P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} &\iff AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ &\iff (A\mathbf{p}_1\ A\mathbf{p}_2) = (\lambda_1\mathbf{p}_1\ \lambda_2\mathbf{p}_2) \end{aligned}$$

となるから、A^m を計算するには $A\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}$ となる $\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{p}$ と実数 λ が求められればよい。

● 14 - 3 : 固有値・固有ベクトル・固有値多項式

A を n 次正方行列とする。$\lambda \in \mathbb{R}$ が A の**固有値**であるとは

(14 - 3 a) $$A\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}$$

を満たす $\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ が存在するときをいう。このような $\mathbf{p}$ を固有値 λ に属する**固有ベクトル**という。

$A\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}$ は、単位行列 E_n を用いて、

(14 - 3 b) $$(\lambda E_n - A)\mathbf{p} = \mathbf{0}$$

と書ける。したがって、$A = (a_{ij})$, $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とおくと、

$$\begin{aligned} \lambda \text{ が } A \text{ の固有値} &\iff \text{連立一次方程式 } (\lambda E_n - A)\mathbf{p} = \mathbf{0} \text{ が非自明な解を持つ} \\ &\iff \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{n,n-1} & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

と言い換えられる。

定義 14 - 3 - 1

n 次正方行列 A に対して、文字 x に関する多項式

(14 - 3 c) $$\Delta_A(x) = |xE_n - A|$$

を A の**固有多項式**という。

上で観察したことから、次の定理を得る。

定理 14-3-2
$\lambda \in \mathbb{R}$ が n 次正方行列 A の固有値となるための必要十分条件は λ が固有方程式 $\Delta_A(x) = 0$ の解になることである。 □

例 14-3-3 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ について、$\Delta_A(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)(x^2-4x+2)$ である。A の固有値は、方程式 $\Delta_A(x) = 0$ を解いて、$\lambda = 2,\ 2 \pm \sqrt{2}$ であることがわかる。 □

● 14-4：再び固有値問題 (つづき)

$A = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$ の m 乗 A^m を計算したかったのであった。そのために、A の固有値、固有ベクトルを求めよう。

固有多項式は

$$\Delta_A(x) = \begin{vmatrix} x-\frac{9}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{10} & x-\frac{7}{10} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & x-1 \\ -\frac{1}{10} & x-\frac{7}{10} \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{10} & x-\frac{7}{10} \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{10} & x-\frac{3}{5} \end{vmatrix}$$
$$= (x-1)(x-\tfrac{3}{5})$$

であるから、$\Delta_A(x) = 0$ を解いて、A の固有値は $1,\ \frac{3}{5}$ であることがわかる。

- 固有値 1 に属する A の固有ベクトルを求める。

そのためには、連立一次方程式 $(1 \cdot E_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解いて、その実数解の中から零ベクトルを取り除けばよい。

$$1 \cdot E_2 - A = \begin{pmatrix} 1-\frac{9}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{10} & 1-\frac{7}{10} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから、連立一次方程式 $(1 \cdot E_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の実数解は、$x - 3y = 0$ を解いて、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

で与えられる。したがって、固有値 1 に属する A の固有ベクトルは、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R},\ t \neq 0)$$

である。

- 固有値 $\frac{3}{5}$ に属する A の固有ベクトルを求める。

上と同様の方法により、連立一次方程式 $(\frac{3}{5} \cdot E_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解いて、その実数解の中から零ベクトルを取り除くことで求めることができる。すると、固有値 $\lambda = \frac{3}{5}$ に属する A の固有ベクトルは、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R},\ t \neq 0)$$

により与えられることがわかる。

今、1 に属する固有ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\frac{3}{5}$ に属する固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を並べて、正方行列 $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ を作る。計算により $\operatorname{rank} P = 2$ であるから P は正則で、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

となる。$P^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ であるから、積を計算して

$$A^m = P\begin{pmatrix} 1^m & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{5}\right)^m \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3+\left(\frac{3}{5}\right)^m & 3-3\left(\frac{3}{5}\right)^m \\ 1-\left(\frac{3}{5}\right)^m & 1+3\left(\frac{3}{5}\right)^m \end{pmatrix}$$

を得る。

情報を発したX氏から数えて m 番目に情報を受け取る人が、他人に「固有値が出る」と伝える確率を $p_1(m)$、「固有値が出ない」と伝える確率を $p_2(m)$ とおくと、

(14-4 a)
$$\begin{pmatrix} p_1(m) \\ p_2(m) \end{pmatrix} = A^m \begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix}$$

である。

上の行列 A の場合、

(14-4 b)
$$\lim_{m\to\infty} A^m = \begin{pmatrix} \lim_{m\to\infty} p_{11}(m) & \lim_{m\to\infty} p_{12}(m) \\ \lim_{m\to\infty} p_{21}(m) & \lim_{m\to\infty} p_{22}(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

となる。したがって、

(14-4 c)
$$(\lim_{m\to\infty} A^m)\begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}(p_1(0)+p_2(0)) \\ \frac{1}{4}(p_1(0)+p_2(0)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

となる。このことは、情報を最初に発信した人が、どのように発信しようとも、上のように情報が伝達される社会では、最終的には、7.5 割の者が試験に「固有値は出る」と聞き、2.5 割の者が試験に「固有値は出ない」と聞く状態に落ち着くことを示している。最後に、(14-4 c) は A の固有値 1 に属する固有ベクトルであることを注意しておこう。これは、次のようにして確認することができる：

$$\begin{pmatrix} p_1(\infty) \\ p_2(\infty) \end{pmatrix} = (\lim_{m\to\infty} A^m)\begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$A\begin{pmatrix} p_1(\infty) \\ p_2(\infty) \end{pmatrix} = A\lim_{m\to\infty} A^m \begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix} = \lim_{m\to\infty} A^{m+1}\begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(\infty) \\ p_2(\infty) \end{pmatrix}.$$

No.14 2024年7月11日

線形代数1事前練習用演習問題

pre14-1. (固有値・固有ベクトル)

行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値を求めよ。

(2) $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$ に対して $A\mathbf{p}$ を計算し、$\mathbf{p}$ が A の固有ベクトルか否かを調べよ。

pre14-2. (固有値・固有ベクトル)

行列 $A = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

---

pre14-1. 固有値は、固有多項式 $\Delta_A(x)$ を計算して、$\Delta_A(x) = 0$ を解けば求められる。$\mathbf{p}$ が A の固有ベクトルか否かを調べるには、$\mathbf{0}$ ではなく、かつ、$A\mathbf{p}$ が $\mathbf{p}$ の定数倍になるかどうかを調べればよい。

(1) $\Delta_A(x) = |xE_3 - A| = \begin{vmatrix} x-4 & -1 & -1 \\ -1 & x-4 & -1 \\ -1 & -1 & x-4 \end{vmatrix}$ を行列式の性質を用いて計算して $\Delta_A(x) = (x-3)^2(x-6)$ を得る。A の固有値は $\Delta_A(x) = 0$ を解いて、$3, 6$ である。

(2) $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ であり、$A\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -15 \\ 24 \\ -9 \end{pmatrix} = 3\mathbf{p}$ であるから、$\mathbf{p}$ は A の固有値 3 に属する固有ベクトルである。

pre14-2. 第14-4節の計算方法を参考に解答すればよい。

A の固有値を求めるために、固有多項式 $\Delta_A(x)$ を計算すると、$\Delta_A(x) = (x-2)(x-4)$ であることがわかる。したがって、A の固有値は $2, 4$ である。

• 固有値 2 に属する A の固有ベクトルを求める。まず連立一次方程式 $(2E_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の実数解を求める。ガウスの消去法を用いて計算して

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

を得る。したがって、固有値 2 に属する A の固有ベクトルは、この中から零ベクトルを除いて、

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R},\ t \neq 0)$$

により与えられる。

• 固有値 4 に属する A の固有ベクトルを求める。固有値 2 の場合と同じプロセスを経て計算すると、固有値 4 に属する A の固有ベクトルは、$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R},\ t \neq 0)$ により与えられることがわかる。

線形代数１・第 14 回 (2024 年 7 月 11 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数１・第 14 回学習内容チェックシート 2024 年 7 月 11 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 次の表を完成させせなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
n 次正方行列 A の固有値とは？	p.	
n 次正方行列 A の固有値 λ に属する固有ベクトルとは？	p.	
n 次正方行列 A の固有多項式とは？	p.	

Q2. 次の表を完成させせなさい。

	解決方法・方針
n 次正方行列 A の固有値を求めるには？	
n 次正方行列 A の固有値 λ が求められたとき、λ に属する固有ベクトルを求めるには？	

Q3. 次の $\boxed{}$ に適当な言葉、数字、記号等を入れなさい。

- A を 2 次正方行列とする。$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ をそれぞれ A の固有値 λ_1, λ_2 に属する固有ベクトルとすると、$A\mathbf{p}_1 = \boxed{}$, $A\mathbf{p}_2 = \boxed{}$ となる。
- ここで、“$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$” が一次独立ならば、行列 $P = (\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2)$ は $\boxed{}$ であり、

$$P^{-1}AP = \boxed{}$$

  と表わされる。
- したがって、$A = P \boxed{} P^{-1}$ と表わすことができ、A の m 乗を

$$A^m = P \boxed{} P^{-1}$$

  によって計算することができる。

Q4. 第 14 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。