§14. 行列の対角化

この節では、正方行列はいつ対角化できるか？という問題を考察する。

● 14 - 1 : 対角化

n 次正方行列 A が (実数の範囲内で) **対角化可能**であるとは、ある n 次正則行列 P によって、$P^{-1}AP$ が対角行列になる、すなわち、ある $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ によって

(14 - 1 a)
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \text{O} \\ & \ddots & \\ \text{O} & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となるときをいう。

注意 14 - 1 - 1 : $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ はすべて A の固有値であり、A の固有値は $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ で尽きる。
(**証明**)

$B = P^{-1}AP$ とおくと、

$$\Delta_B(x) = |xE_n - P^{-1}AP| = |P^{-1}(xE_n - A)P| = |xE_n - A||P^{-1}||P| = \Delta_A(x)$$

となる。したがって、

$$(A \text{ の固有値}) = (\Delta_A(x) = 0 \text{ の解}) = (\Delta_B(x) = 0 \text{ の解})$$

を得る。ここで、

$$\Delta_B(x) = \begin{vmatrix} x-\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x-\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-\lambda_n \end{vmatrix} = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$$

なので、$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ はすべて A の固有値であり、A の固有値は $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ で尽きている。 □

問 正方行列は、常に、対角化できるか？

定理 14 - 1 - 2

n 次正方行列 A が n 個の異なる固有値を持つならば、A は対角化可能である。

定理の証明の前に、例を 1 つ見ておこう。

例 14 - 1 - 3 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有多項式は $\Delta_A(x) = x^2 - 6x + 2$ である。$\Delta_A(x) = 0$ の解は $x = 3 \pm \sqrt{7}$ であるから、A は対角化可能である。 □

[定理 14 - 1 - 2] の証明に次の補題を用いる。

補題 14 - 1 - 4

$\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ を n 次正方行列 A の異なる固有値とする。このとき、$\mathbf{p}_i$ $(i = 1, \cdots, k)$ が固有値 λ_i に属する固有ベクトルならば、“$\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_k$” は一次独立である。

(**証明**)

ここでは $k=2$ の場合に示す (k が一般の場合は帰納法を用いて証明される)。

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ を A の異なる固有値とし、$\mathbf{p}, \mathbf{q}$ をそれぞれ $\lambda,\ \mu$ に属する固有ベクトルとする。

$$s\mathbf{p} + t\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (s, t \in \mathbb{R}) \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

とおく。この両辺に A を作用させて

$$s\lambda\mathbf{p} + t\mu\mathbf{q} = \mathbf{0} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

が得られる。①の両辺を λ 倍して②を引くと

$$t(\lambda - \mu)\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

となる。$\lambda \neq \mu$ かつ $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ なので、上式より $t=0$ を得る。同様に、①の両辺を μ 倍して②を引くことにより、$s=0$ が示される。故に、“$\mathbf{p}, \mathbf{q}$” は一次独立である。 □

(**[定理 14 - 1 - 2] の証明**)

A の n 個の相異なる固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ とし、$\mathbf{p}_i$ $(i=1, \cdots, n)$ を固有値 λ_i に属する固有ベクトルとする。[補題 14 - 1 - 4] により $\mathbb{R}^n$ の n 個のベクトル “$\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n$” は一次独立であるから、[定理 12 - 6 - 1] により、$P = (\mathbf{p}_1 \ \cdots \ \mathbf{p}_n)$ は正則である。

$$AP = A(\mathbf{p}_1 \ \cdots \ \mathbf{p}_n) = (A\mathbf{p}_1 \ \cdots \ A\mathbf{p}_n) = (\lambda_1\mathbf{p}_1 \ \cdots \ \lambda_n\mathbf{p}_n) \overset{(*)}{=} P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \text{O} \\ & \ddots & \\ \text{O} & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

であり、この両辺に左から P^{-1} を掛けて、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \text{O} \\ & \ddots & \\ \text{O} & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

を得る。よって、A は対角化可能である。 □

注意 14 - 1 - 5 ：$(*)$ の部分は、P を成分で書いて積を計算してみるとわかるが、次のように導くこともできる。$E_n = (\mathbf{e}_1 \ \cdots \ \mathbf{e}_n)$ とおく。このとき、

$$(\lambda_1\mathbf{p}_1 \ \cdots \ \lambda_n\mathbf{p}_n) = (\lambda_1 P\mathbf{e}_1 \ \cdots \ \lambda_n P\mathbf{e}_n) = P(\lambda_1\mathbf{e}_1 \ \cdots \ \lambda_n\mathbf{e}_n) = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \text{O} \\ & \ddots & \\ \text{O} & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

● 14 - 2 : 固有方程式が重解を持つ場合の対角化

固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ の中に同じものがあるとき、すなわち、固有方程式が重解を持つときには、対角化できる場合とできない場合がある。

例 14 - 2 - 1 3 次実正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ は対角化可能か否かを調べる。

$\Delta_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 3 & -3 \\ -3 & x+5 & -3 \\ -6 & 6 & x-4 \end{vmatrix} = \cdots = (x+2)^2(x-4)$ となる。A の固有方程式が重解を持つので、この時点では対角化可能かどうかわからない。そこで、固有値 $\lambda = -2, 4$ に属する固有ベクトルを求める。

● 固有値 -2 に属する A の固有ベクトルを求める。行基本変形により、

$$(-2)E_3 - A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので、連立一次方程式 $((-2)E_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の実数解は、$x - y + z = 0$ を解いて、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

により与えられる。このうち、$\mathbf{0}$ 以外が固有ベクトルであるから、固有値 -2 に属する A の固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R},\ (s,t) \neq (0,0))$$

である。(最後に付け足された $(s,t) \neq (0,0)$ は、s, t は同時に 0 でないことを意味している。$s \neq 0,\ t \neq 0$ とは異なることに注意。)

● 固有値 4 に属する A の固有ベクトルは、上と同じ要領で計算して、次で与えられることがわかる：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R},\ t \neq 0).$$

今、-2 に属する A の固有ベクトルの中から一次独立なベクトルの組 “$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$” を選び、$4$ に属する A の固有ベクトルの中から $\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を選ぶ。このとき、行列 $P = (\mathbf{p}_1\ \ \mathbf{p}_2\ \ \mathbf{p}_3)$ は、$\operatorname{rank} P = 3$ より、正則となる。さらに、$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ が順に A の固有値 $-2, -2, 4$ に属する固有ベクトルであることから、(積を計算せずに)

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となることがわかる。よって、A は対角化可能である。 □

● 14-3：固有値の重複度と対角化可能性判定条件

n 次正方行列 A の固有多項式が実数の範囲内で次のように一次式の積に分解できる場合を考える：

(14-3 a)
$$\mathit{\Delta}_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$$

(但し、$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ は異なる実数, $m_1 \geq 1, \cdots, m_k \geq 1,\ \ m_1 + \cdots + m_k = n$)

このとき、m_i を固有値 λ_i の**重複度**という。

補題 14-3-1

固有値 λ_i に属する A の固有ベクトルの中で、一次独立な組を構成するベクトルの最大個数を d_i とおくと、

(14-3 b)
$$1 \leq d_i \leq m_i \qquad (i = 1, \cdots, k).$$

(**略証**)

各 i に対して固有値 λ_i に属する一次独立な固有ベクトルの組 “$\mathbf{p}_{i1}, \cdots, \mathbf{p}_{id_i}$” をとると、[補題 14-1-4] の証明と同様の方法で、“$\mathbf{p}_{11}, \cdots, \mathbf{p}_{1d_1}, \cdots, \mathbf{p}_{k1}, \cdots, \mathbf{p}_{kd_k}$” は $\mathbb{R}^n$ における一次独

立なベクトルの組であることがわかる。[定理 13-2-1] より、$d_1+\cdots+d_k \leq n$ である。そこで、これらに $\mathbb{R}^n$ のベクトルを $n-(d_1+\cdots+d_k)$ 個追加して一次独立なベクトルの組を作る†。これらを並べて n 次正方行列 P を作ると、[定理 13-6-1] より P は正則行列であり、$A\mathbf{p}_{ij}=\lambda_i\mathbf{p}_{ij}$ $(i=1,\cdots,k,\ j=1,\cdots,d_i)$ であるから、

$$P^{-1}AP=\left(\begin{array}{ccc:c} \overbrace{\lambda_1 \ddots \lambda_1}^{d_1} & & \text{O} & \\ & \ddots & & * \\ \text{O} & & \overbrace{\lambda_k \ddots \lambda_k}^{d_k} & \\ \hdashline & \mathbf{0} & & D \end{array}\right)$$

の形となる。よって、$\varDelta_A(x)=\varDelta_{P^{-1}AP}(x)=(x-\lambda_1)^{d_1}\cdots(x-\lambda_k)^{d_k}|xE_l-D|$ $\bigl(l=n-(d_1+\cdots+d_k)\bigr)$ となる。これと (14-3 a) を比較すれば、$d_i \leq m_i$ $(i=1,\cdots,k)$ がわかる。 □

注意. 上の略証の † の部分で、「$\mathbb{R}^n$ において k $(1 \leq k < n)$ 個のベクトルの組 "$\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k$" が一次独立ならば、$(n-k)$ 個のベクトル $\mathbf{v}_{k+1},\cdots,\mathbf{v}_n$ を付け加えて、組 "$\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_{k+1},\cdots,\mathbf{v}_n$" が一次独立となるようにすることができる」という事実を使った。この事実の証明については教科書を参照。

(14-3 b) において $m_i=d_i$ $(i=1,\cdots,k)$ となるとき、行列 A は対角化可能であり、その逆も成り立つ。すなわち、次が成り立つ。

定理 14-3-2

A が実数の範囲内で対角化可能であるための必要十分条件は、A の固有多項式が (14-3 a) のように実数の範囲内で一次式の積に分解でき、かつ、各 $i=1,\cdots,k$ に対して、A の固有値 λ_i に属する固有ベクトルの中から m_i 個からなる一次独立なベクトルの組をとることができることである。このとき、各 i について A の固有値 λ_i に属する一次独立な固有ベクトルの組 "$\mathbf{p}_{i1},\cdots,\mathbf{p}_{im_i}$" をとり、それらを並べて行列

(14-3 c) $$P=(\mathbf{p}_{11}\ \cdots\ \mathbf{p}_{1m_1}\ \cdots\ \mathbf{p}_{k1}\ \cdots\ \mathbf{p}_{km_k})$$

を作れば、P は正則であって、次が成り立つ：

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \ddots \lambda_1}^{m_1} & & \text{O} \\ & \ddots & \\ \text{O} & & \overbrace{\lambda_k \ddots \lambda_k}^{m_k} \end{pmatrix}$$

例 14-3-3 2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ の固有多項式は $\varDelta_A(x)=(x-1)^2$ となるので、A の固有値は 1 のみであり、その重複度は 2 である。

1 に属する固有ベクトルは、連立一次方程式 $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を解いて、$t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $(t\in\mathbb{R},\ t\neq 0)$ で与えられることがわかる。固有値が 1 であるような A の固有ベクトルの中で、一次独立なものは 2 個とれないので、A は対角化可能でない。 □

No.14 2026 年 7 月 9 日

線形代数 1 事前練習用演習問題

pre14-1. (固有値の重複度と対角化可能性)

3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

について次の問いに答えよ。

(1) A の固有値とその重複度を求めよ。

(2) A の重複度 2 の固有値に対して、その固有値に属する固有ベクトルを求めよ。

(3) (i) A は対角化可能か否かを簡単な理由をつけて答えよ。

(ii) さらに、A が対角化可能なときには、$P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正則行列 P の作り方を述べ、

(iii) そのとき $P^{-1}AP$ がどのような対角行列になるのかを答えよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

---

pre14-1. 第 14 - 2 節の計算方法に従って解くことができる。

(1) A の固有多項式 $\Delta_A(x) = |xE_3 - A|$ を計算すると、

$$\Delta_A(x) = \begin{vmatrix} x-8 & -12 & 6 \\ 1 & x-1 & -2 \\ 2 & 8 & x-9 \end{vmatrix} = \ldots\cdots = (x-5)^2(x-8)$$

のように因数分解されることがわかる。したがって、A の固有値は $5, 8$ であり、5 の重複度は 2 であり、8 の重複度は 1 である。

(2) A の固有値 5 に属する固有ベクトルを求める。まず、連立一次方程式 $(5E_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の実数解を求める。この係数行列 $5E_3 - A$ に、ガウスの消去法の前進部分に相当する行基本変形を施して階段型にすると

$$5E_3 - A = \begin{pmatrix} -3 & -12 & 6 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 8 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。したがって、方程式 $x + 4y - 2z = 0$ を解く。$y = s,\ z = t\ (s, t \in \mathbb{R})$ とおくと、$x = -4s + 2t$ となるから、$(5E_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の実数解は

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4s + 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

により与えられる。したがって、重複度 2 の A の固有値 5 に属する固有ベクトルは、この中から零ベクトルを除いて

$$s \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R},\ (s, t) \neq (0, 0))$$

により与えられる。

(3) (2) より、固有値 5 に属する固有ベクトルの中から、

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を選ぶ。組 “$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$” は一次独立である。このように、重複度が 2 以上の固有値について、重複度の個数分からなる一次独立なベクトルの組を選ぶことができるので、 A は対角化可能である。$\mathbf{p}_3$ を A の固有値 8 に属する A の固有ベクトルとして、3 次正方行列 $P = (\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \mathbf{p}_3)$ を考えると、これは正則であり、このとき、$A\mathbf{p}_1 = 5\mathbf{p}_1,\ A\mathbf{p}_2 = 5\mathbf{p}_2,\ A\mathbf{p}_3 = 8\mathbf{p}_3$ であるから、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ となる。

線形代数１・第 14 回 (2026 年 7 月 9 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数１・第 14 回学習内容チェックシート 2026 年 7 月 9 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
n 次正方行列 A が (実数の範囲内で) 対角化可能であるとは？	p.	
n 次正方行列 A の固有値の重複度とは？	p.	

Q2. 次の $\boxed{}$ に適当な言葉、数字、記号等を入れなさい。

- n 次正方行列 A が $\boxed{}$ 個の $\boxed{}$ を持つならば、直ちに、対角化可能であることがわかる。
- n 次正方行列 A の固有多項式が、互いに異なる実数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ を用いて $\Delta_A(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$ のように因数分解されたとする。このとき、$P^{-1}AP$ が対角行列となる n 次正則行列 P は、各 i に対して λ_i に属する固有ベクトル $\mathbf{p}_i$ を 1 つずつ取り、$P = \boxed{}$ のように作ることができる。このとき、$P^{-1}AP = \boxed{}$ となる。
- n 次正方行列 A の固有値 λ_i の重複度を m_i とし、固有値 λ_i に属する固有ベクトルの中で一次独立なものの最大個数を d_i とすると、m_i と d_i との間には常に不等式 $\boxed{}$ が成り立つ。A が対角化可能であるための必要十分条件は、A のすべての固有値 λ_i について $\boxed{}$ が成り立つことである。

Q3. 3 次正方行列 A の固有多項式が α, β を異なる実数として $\Delta_A(x) = (x-\alpha)(x-\beta)^2$ であったとする。

(1) A が対角化可能か否かを調べるための方法・手順を書きなさい。

(2) 上で書いた方法・手順で A が対角化可能であるとわかった場合、$P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を見つけるための方法を書きなさい。

Q4. 第 14 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。