§14. 線形変換の固有値と対角化

ここでは、線形変換に対して固有値・固有ベクトルの概念を導入し、これらの概念が対角化可能であることと密接に関連していることを説明する。最後に、線形変換の対角化の応用例として、数列の一般項を求める問題と常微分方程式の解を求める問題を取り上げる。

● 14 - 1 : 線形変換の固有値・固有ベクトル・固有空間

V をベクトル空間とし、$T : V \longrightarrow V$ を線形変換とする。$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して、

(14 - 1 a)
$$W(\lambda, T) = \{\ v \in V \mid T(v) = \lambda v\ \}$$

と定める。どのような線形変換 T について考察しているのかが明確な場合には、$W(\lambda, T)$ を $W(\lambda)$ と略記することもある。$W(\lambda, T)$ は V の部分空間である。

$W(\lambda, T) \neq \{0_V\}$ のとき、λ を T の**固有値**といい、$W(\lambda, T)$ を T の固有値 λ に属する**固有空間**といい、$W(\lambda, T)$ の 0_V でない元を λ に属する T の**固有ベクトル**という。

例 14 - 1 - 1 $C^\infty(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の何回でも微分可能な関数全体からなる集合とする。$C^\infty(\mathbb{R})$ は $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の部分空間をなす。

微分作用素 $\frac{d}{dx} : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ を考える。このとき、実数 λ に対して

$$\frac{d}{dx}(e^{\lambda x}) = \lambda e^{\lambda x}$$

である。関数として $e^{\lambda x} \neq 0$ であるから、λ は微分作用素 $\frac{d}{dx}$ の固有値であり、関数 $e^{\lambda x}$ は λ に属する固有ベクトルである。 □

[線形代数 1] および第 3 節で定義されている n 次正方行列 A の固有値および固有ベクトルは、A から定まる線形変換 $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ の固有値および固有ベクトルに他ならない。A の固有値 λ に対して $W(\lambda, T_A)$ を **A の λ に属する（$\mathbb{R}^n$ における）固有空間**と呼ぶ。

例 14 - 1 - 2 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 12 & 5 & -5 \\ -11 & -4 & 11 \\ 7 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ について、その固有多項式 $\mathit{\Delta}_A(x) = |xE_3 - A|$ は $\mathit{\Delta}_A(x) = (x-7)^2(x+6)$ となるから、A の固有値は 7 (重複度 2), -6 (重複度 1) である。固有値 $\lambda = 7, -6$ に属する固有空間 $W(\lambda, T_A)$ は、連立一次方程式 $(\lambda E_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解いて

$$W(7, T_A) = \left\{\ s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ \middle|\ s, t \in \mathbb{R}\ \right\}, \quad W(-6, T_A) = \left\{\ t\begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}\ \middle|\ t \in \mathbb{R}\ \right\}$$

であることがわかる。よって、$\dim W(7, T_A) = 2$, $\dim W(-6, T_A) = 1$ であり、$W(7, T_A)$ の基底として $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を、$W(-6, T_A)$ の基底として $\begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}$ を選ぶことができる。 □

● 14 - 2 : 線形変換とその行列表示の固有値・固有ベクトルの間の関係

$T : V \longrightarrow V$ を n 次元ベクトル空間 V ($\neq \{0\}$) 上の線形変換とする。V に基底を 1 つ指定すると T の行列表示 A を得る。$\Phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ をその指定された基底から定まる座標系とすると、$v \in V$ に対して

(14 - 2 a) $$T(v) = \lambda v \iff A\Phi(v) = \lambda\Phi(v)$$

が成り立つ。次の言い換えが成立する。

- (T の固有値) = (A の固有値)
- T の各固有値 λ に対して
  (i) $\Phi\big(W(\lambda, T)\big) = W(\lambda, T_A)$
  (ii) v が λ に属する T の固有ベクトル $\iff$ $\Phi(v)$ が λ に属する A の固有ベクトル

V 上の線形変換 T に対して、その行列表示 A を用いて

(14 - 2 b) $$\Delta_T(x) = \Delta_A(x)$$

と定める。右辺は V の行列表示の選び方に依らない。実際、V の別の基底に関する T の行列表示を B とおくと、前節の結果より、$B = P^{-1}AP$ となる正則行列 P が存在する。このとき、行列式の性質より、

$$\Delta_B(x) = |xE_n - B| = |P^{-1}(xE_n - A)P| = |P^{-1}| \cdot |xE_n - A| \cdot |P| = \Delta_A(x)$$

となる。(14 - 2 b) により定義される多項式 $\Delta_T(x)$ を線形変換 T の**固有多項式**と呼ぶ。

線形変換 T の固有値を求めるには、方程式 $\Delta_T(x) = 0$ を x について解けばよい。具体的には、V の基底を 1 つとり、その基底に関する T の行列表示 A を求める。A の固有多項式 $\Delta_A(x)$ を計算して $\Delta_A(x) = 0$ を満たす実数 x を求めれば、それが T の固有値となる。

● 14 - 3 : 対角化可能な線形変換

V ($\neq \{0_V\}$) を n 次元ベクトル空間とする。V 上の線形変換 $T : V \longrightarrow V$ が**対角化可能**であるとは、T の固有ベクトルからなる基底が V 内に存在するとき、すなわち、

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1,\ \cdots,\ T(v_n) = \lambda_n v_n$$

となる $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ と V の基底 “$v_1, \cdots, v_n$” が存在するときをいう。この場合、基底 “$v_1, \cdots, v_n$” に関する T の行列表示は対角行列である。したがって、$V = \mathbb{R}^n$ であって、T が n 次正方行列 A から定まる線形写像 T_A のときには次が成立する：

補題 14 - 3 - 1
n 次正方行列 A に対して、

T_A が対角化可能 $\iff$ A が対角化可能、すなわち、ある n 次正則行列 P と

実数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ について $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{O} & & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

[線形代数 1] の [定理 15 - 3 - 2] より、n 次正方行列 A の固有多項式が $\mathbb{R}$ の範囲内で

(14 - 3 a) $$\Delta_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$$

(但し、$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ は相異なる実数, $m_1 \geq 1, \cdots, m_k \geq 1$, $m_1 + \cdots + m_k = n$)

のように一次式の積に分解されるとき、A が対角化可能であるための必要十分条件は、各 $i = 1, \cdots, k$ に対して、A の固有値 λ_i に属する固有ベクトルの中から一次独立なベクトルを m_i 個とることができることであった。固有値が λ_i であるような A の固有ベクトルの中で、一次独立なものの最大個数は $\dim W(\lambda_i, T_A)$ に一致する ([定理 9-3-1]) から、次の定理が導かれる。

定理 14-3-2
$V\ (\neq \{0_V\})$ を n 次元ベクトル空間とし、$T : V \longrightarrow V$ を V 上の線形変換とする。T の固有多項式 $\Delta_T(x)$ は $\mathbb{R}$ の範囲内で (14-3 a) の右辺のように一次式の積に分解されると仮定する。このとき、

$$T \text{ は対角化可能である} \iff \text{すべての } i = 1, \cdots, k \text{ に対して } \dim W(\lambda_i, T) = m_i$$

が成り立つ。さらに、$W(\lambda_i, T)$ から基底 “$v_{i1}, \cdots, v_{im_i}$” をとると、“$v_{11}, \cdots, v_{1m_1}, v_{21}, \cdots, v_{2m_2}, \cdots, v_{k1}, \cdots, v_{km_k}$” は V の基底をなし、この基底に関する T の行列表示は対角行列になる。

● 14-4：線形変換の対角化の応用

漸化式の一般項を求める問題に線形変換の対角化を応用しよう。

例 14-4-1 漸化式

(14-4 a) $$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たす実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の一般項を求めよう。

V を与えられた漸化式を満たす実数列の全体からなるベクトル空間とし、$T : V \longrightarrow V$ を

$$T(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$$

によって定義される $\mathbb{R}$-線形変換とする。

$\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ をそれぞれ最初の 2 項が次のように与えられる V の元とする：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &: 1, 0, \cdots\cdots (\text{第 3 項以降は与えられた漸化式によって決める}), \\ \boldsymbol{e}_2 &: 0, 1, \cdots\cdots (\text{第 3 項以降は与えられた漸化式によって決める}) \end{aligned}$$

このとき、“$\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$” は V の基底をなす。この基底に関する T の行列表示 A は

(14-4 b) $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

で与えられる。A の固有値は $1, 2$ であり、それぞれに属する固有空間は

$$W(1, T_A) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad W(2, T_A) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

で与えられる。したがって、$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$ とおくと、“$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$” は V の基底であり、$T(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_1,\ T(\boldsymbol{v}_2) = 2\boldsymbol{v}_2$ を満たすことがわかる。この 2 つの等式を満たす $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は $\boldsymbol{v}_1 = \{1\}_{n=1}^{\infty},\ \boldsymbol{v}_2 = \{2^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ により与えられる。また、

$$(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{より} \qquad (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る。よって、漸化式 (14-4 a) を満たす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は次で与えられる：

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 = (2a_1 - a_2)\boldsymbol{v}_1 + (-a_1 + a_2)\boldsymbol{v}_2 = \{(2a_1 - a_2) + (-a_1 + a_2)2^{n-1}\}_{n=1}^{\infty} \quad \square$$

定数係数線形常微分方程式の解を求める問題に線形変換の対角化を応用しよう。

例 14 - 4 - 2 微分方程式

(14 - 4 c) $$f'' - 3f' + 2f = 0$$

を満たす $\mathbb{R}$ 上の関数 $f = f(x)$ の全体からなるベクトル空間を V とおく。

(14 - 4 d) $$V = \{\ ae^x + be^{2x} \mid a, b \in \mathbb{R}\ \}$$

と表わされる。

$\because$)

微分方程式 (14 - 4 c) を満たす関数 f は $f(0), f'(0)$ の値を指定するとただ一つに決まることが知られている (この事実は常微分方程式の解の存在と一意性と呼ばれている)。したがって、$\dim V = 2$ であり、その基底として、初期条件 $f_1(0) = 1,\ f_1'(0) = 0;\ f_2(0) = 0,\ f_2'(0) = 1$ を満たす (14 - 4 c) の解 "f_1, f_2" を選ぶことができる。線形変換 $T : V \longrightarrow V$ を微分作用素とする：

$$T(f) = f' \qquad (f \in V).$$

V の基底 f_1, f_2 に関する T の行列表示は (14 - 4 b) と同じなので、[例 14 - 4 - 1] での議論と同様にして、$g_1, g_2 \in V$ を

$$g_1 := f_1 + f_2, \quad g_2 := f_1 + 2f_2$$

と定めるとこれらは V の基底であり、$T(g_1) = g_1,\ T(g_2) = 2g_2$ を満たすことがわかる。

$$T(g_1) = g_1 \iff g_1' = g_1 \iff \text{ある } c_1 \in \mathbb{R} \text{ を用いて } g_1(x) = c_1 e^x,$$
$$T(g_2) = 2g_2 \iff g_2' = 2g_2 \iff \text{ある } c_2 \in \mathbb{R} \text{ を用いて } g_2(x) = c_2 e^{2x}$$

が成り立つ。$g_1(0) = 1,\ g_2(0) = 1$ であるから、$c_1 = c_2 = 1$ とわかる。よって、V は (14 - 4 d) のように表わされる。 □

特に、$f(0) = 1,\ f'(0) = -3$ を満たす $f \in V$ を求めよう。$f \in V$ は定数 a, b を用いて

$$f(x) = ae^x + be^{2x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

のように表わされる。$f(0) = a,\ f'(0) = a + 2b$ であるから、$a = 5,\ b = -4$ と計算される。よって、微分方程式 (14 - 4 c) の初期条件 $f(0) = 1,\ f'(0) = -3$ を満たす解 f は

$$f(x) = 5e^x - 4e^{2x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

である。 □

注意： $f'' + 2f' + f = 0$ の場合に同じ方法を適用すると、$T = \frac{d}{dx}$ の固有多項式は $\Delta_T(x) = (x+1)^2$ となり、$\dim W(-1, T) = 1 < 2$ となることがわかる。よって、T は対角化可能でないが、このような場合には Jordan 標準形を用いることでその微分方程式の解全体のなすベクトル空間の基底を求めることができる。実際、c_1, c_2 を実定数として $f'' + c_1 f' + c_2 f = 0$ の形で与えられる微分方程式について、$\Delta_T(x) = (x - \lambda)^2$, $\dim W(\lambda, T) = 1 < 2$ となるときには、関数の組 "$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x}$" が基底をなす。したがって、この場合、微分方程式 $f'' + c_1 f' + c_2 f = 0$ を満たす任意の解 f は定数 a, b を用いて $f(x) = ae^{\lambda x} + bxe^{\lambda x}$ のように表わされることがわかる。同じ結果は k 階の常微分方程式についても成立する。 □

No.14　　　　2025 年 1 月 9 日

線形代数 2 事前練習用演習問題

pre14-1. (線形変換の対角化とその応用)

漸化式

$$a_{n+3} - 8a_{n+1} + 7a_n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たす実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の全体からなるベクトル空間を V とし、$T : V \longrightarrow V$ を

$$T(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty} + \{a_{n+2}\}_{n=1}^{\infty}$$

によって定義される線形変換とする。

(1) V の基底 $\mathscr{B}$ を一組与えよ。さらに、任意の $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in V$ を $\mathscr{B}$ の一次結合で表わせ。

(2) (1) で与えた V の基底 $\mathscr{B}$ に関する T の行列表示 A を求めよ。

(3) T は対角化可能か否かを調べよ。対角化可能な場合には、T の行列表示が対角行列になるような V の基底 $\mathscr{B}'$ を一組与えて、そのときの T の行列表示を記せ。但し、$\mathscr{B}'$ は、それを構成する各数列を (1) で与えた基底 $\mathscr{B}$ の一次結合で表わすことにより与えよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre14-1. (1) V に属する数列 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を次のように定める：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &: 1, 0, 0, \overbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}^{\text{第 4 項以降は与えられた漸化式により帰納的に定義}} \\
\boldsymbol{e}_2 &: 0, 1, 0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\boldsymbol{e}_3 &: 0, 0, 1, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

$\mathscr{B} =$ “$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$” は V の基底をなす。特に、任意の $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in V$ は

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$$

にように表わされる。

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in V$ に対して、$T(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})$ の最初の 3 項は、T の定義より

$$a_2 + a_3,\ -7a_1 + 8a_2 + a_3,\ -7a_1 + a_2 + 8a_3$$

であるから、

$$T(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = (a_2 + a_3)\boldsymbol{e}_1 + (-7a_1 + 8a_2 + a_3)\boldsymbol{e}_2 + (-7a_1 + 15a_2 + 8a_3)\boldsymbol{e}_3$$

のように表わされることがわかる。このことと、与えられた漸化式を用いて V の基底 $\mathscr{B} =$ “$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$” に関する T の行列表示 A は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -7 & 8 & 1 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

であることがわかる。

(3) まず、T の固有値を求める。固有多項式は

$$\varDelta_T(x) = \varDelta_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ 7 & x-8 & -1 \\ 7 & -1 & x-8 \end{vmatrix} = \cdots\cdots = (x-2)(x-7)^2$$

のように計算されるから、T の固有値は $2, 7$ である。このうち、重複度が 2 の固有値 7 について、固有空間 $W(7, T)$ の次元を計算する。

連立一次方程式 $(7E_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ をガウスの消去法を用いて解くことにより、$\dim W(7, T) = 2$ がわかる。これより、T は対角化可能なことがわかる。

T が対角行列で表わされるような V の基底 $\mathscr{B}'$ を一組求めよう。

$$W(7, T_A) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

となるから、その基底として "$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$" が見つかる。$\mathbf{p}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は、それぞれ数列 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1 + 7\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$ と対応するから、"$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$" は $W(7, T)$ の基底である。

同様にして、重複度が 1 の固有値 2 について、$W(2, T)$ の一組の基底 "$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$" が求められる。

"$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$" は V の基底であり、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が固有値 7 に属し、$\boldsymbol{v}_3$ が固有値 2 に属することから、基底 $\mathscr{B}' :=$ "$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$" に関する T の行列表示は

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

になる。

線形代数２・第 14 回 (2025 年 1 月 9 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数２・第14回学習内容チェックシート 2025年1月9日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. V をベクトル空間、$T : V \longrightarrow V$ を線形変換とします。次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
T の固有値 λ に属する固有空間 $W(\lambda, T)$ とは？	p.	
T の固有値 λ に属する固有ベクトルとは？	p.	

Q2. V を n 次元ベクトル空間、$T : V \longrightarrow V$ を線形変換とします。

(1) 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
T の固有多項式 $\Delta_T(x)$ とは？	p.	
T が対角化可能であるとは？	p.	

(2) T の固有値を求めるにはどうすればよいか。その手順を書きなさい。

$\boxed{}$

Q3. $T : V \longrightarrow V$ を n 次元ベクトル空間 V 上の線形変換、$\mathscr{A} = \text{“}e_1, \cdots, e_n\text{”}$ を V の基底とし、基底 $\mathscr{A}$ に関する T の行列表示を A とします。次の $\boxed{}$ に適当な言葉、数字、数式、記号等を入れなさい。

- 基底 $\mathscr{A}$ に関する V の座標系を $\Phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ とおく。行列 A の固有値 λ に属する固有空間 $W(\lambda, T_A) = \{\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\ \}$ に対して 1 組の基底 “$\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_m$” が求めらたとすると、$T$ の固有値 λ に属する固有空間 $W(\lambda, T)$ の 1 組の基底が $\boxed{}$ により求められる。
- ある実数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ に対して $T(v_1) = \lambda_1 v_1, \cdots, T(v_n) = \lambda_n v_n$ となるような V の基底 $\mathscr{B} = \text{“}v_1, \cdots, v_n\text{”}$ が見つかったとする。基底 $\mathscr{B}$ に関する T の行列表示は $\boxed{}$ となる。$\mathscr{B}$ から $\mathscr{A}$ への基底の変換行列を P とおくと、$(v_1\ \cdots\ v_n) = (e_1\ \cdots\ e_n)\boxed{}$ であるから、$(e_1\ \cdots\ e_n) = (v_1\ \cdots\ v_n)\boxed{}$ である。よって、$k = 1, 2, 3, \cdots$ に対して
$$\big(T^k(e_1)\ \cdots\ T^k(e_n)\big) = \big(T^k(v_1)\ \cdots\ T^k(v_n)\big)\boxed{}$$
が成り立つ。この等式と $T^k(v_j) = \boxed{}$ $(j = 1, \cdots, n)$ を用いて、任意の $v \in V$ に対して $T^k(v)$ を計算することができる。

Q4. 第14回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。