§14. 冪零変換の Jordan 標準形

固有値を 0 だけしかもたない線形変換は冪零変換と呼ばれる。この節では、冪零変換の Jordan 標準形の求め方を説明する。以下、$\mathbb{K}$ はいつものように体を表わす。

● 14 - 1 : Jordan 標準形

$\alpha \in \mathbb{K}$ に対して、m 次正方行列

(14 - 1 a)
$$J(\alpha, m) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & \text{O} & \\ & \alpha & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \text{O} & & \alpha & 1 \\ & & & & \alpha \end{pmatrix}$$

を **Jordan ブロック**または **Jordan 細胞**という。

有限個の Jordan ブロックの直和として与えられる行列、すなわち、次の形をした行列を **Jordan 行列**という：

(14 - 1 b)
$$\begin{pmatrix} J(\alpha_1, n_1) & & & \text{O} \\ & J(\alpha_2, n_2) & & \\ & & \ddots & \\ \text{O} & & & J(\alpha_l, n_l) \end{pmatrix}.$$

定理 14 - 1 - 1
V $(\neq \{0_V\})$ を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし、$T : V \longrightarrow V$ を三角化可能な $\mathbb{K}$-線形変換とする。このとき、V の基底 $\mathscr{B}$ を適当に選ぶと、$\mathscr{B}$ に関する T の行列表示は Jordan 行列になる。その行列を T の **Jordan 標準形**という。

[定理 14 - 1 - 1] の証明は次節に回す。この節では冪零変換の Jordan 標準形を考察する。

● 14 - 2 : 冪零変換

定義 14 - 2 - 1
V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間、$T : V \longrightarrow V$ を $\mathbb{K}$-線形変換とする。
$T^k = 0$ となる $k \in \mathbb{N}$ が存在するとき、T は**冪零変換**であるという。$T^k = 0$ となる自然数 k のうち、最小の値を冪零変換 T の**冪零指数**という。
同様に、n 次正方行列 N が**冪零**であるとは、$N^k = \text{O}$ (零行列) となる $k \in \mathbb{N}$ が存在するときをいい、$N^k = \text{O}$ を満たす最小の自然数 k を冪零行列 N の**冪零指数**という。

● 14 - 3 : 冪零変換から定まるフィルトレーション

補題 14 - 3 - 1
V $(\neq \{0_V\})$ を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間、$T : V \longrightarrow V$ を冪零指数 k の冪零変換とし、

$$W_i = \operatorname{Ker} T^i \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

とおく。このとき、部分空間の増大列

(14 - 3 a)
$$\{0\} = W_0 \subsetneqq W_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq W_{k-1} \subsetneqq W_k = V$$

が得られる。この増大列を冪零変換 T から定まる V の**フィルトレーション**という。

(**証明**)

$W_0 = \mathrm{Ker}T^0 = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_V) = \{0\}$ であり、$i = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$\begin{aligned} x \in W_i = \mathrm{Ker}T^i &\implies T^i(x) = 0 \\ &\implies T^{i+1}(x) = T(T^i(x)) = T(0) = 0 \\ &\implies x \in W_{i+1} = \mathrm{Ker}T^{i+1} \end{aligned}$$

より、$W_i \subset W_{i+1}$ である。次に、$0 \leq i \leq k-1$ に対して、$W_i \neq W_{i+1}$ であることを示す。$W_{k-1} \neq V$ より、$T^{k-1}(x) \neq 0$ となる $x \in V$ が存在する。このとき、次が成り立つ：

$$\begin{cases} T^i(T^{k-1-i}(x)) = T^{k-1}(x) \neq 0, \\ T^{i+1}(T^{k-1-i}(x)) = T^k(x) = 0. \end{cases}$$

よって、$T^{k-1-i}(x) \in \mathrm{Ker}T^{i+1}$ かつ $T^{k-1-i}(x) \notin \mathrm{Ker}T^i$ ゆえ、$W_i \subsetneqq W_{i+1}$ である。 □

以下、$v_1, \cdots, v_r \in V$ によって張られる部分空間を $\langle v_1, \cdots, v_r \rangle$ によって表わすことにする。

補題 14-3-2

$V\ (\neq \{0_V\})$ を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし、$T : V \longrightarrow V$ を冪零指数 k の冪零変換とする。$W_i = \mathrm{Ker}T^i\ (i = 0, 1, 2, \cdots)$ とおくと、$2 \leq i \leq k$ に対して $W_{i-1} \subsetneqq W_i$ となる。そこで、W_i の一次独立なベクトルの列 "$x_1, \cdots, x_r$" を次を満たすように選ぶ。

$$W_{i-1} \oplus \langle x_1, \cdots, x_r \rangle = W_i.$$

このとき、"$T(x_1), \cdots, T(x_r)$" は一次独立な W_{i-1} のベクトルの列であって、

$$W_{i-2} \cap \langle T(x_1), \cdots, T(x_r) \rangle = \{0\}.$$

注意. 上の補題から $W_{i-2} \oplus \langle T(x_1), \cdots, T(x_r) \rangle \subset W_{i-1}$ であるが、$W_{i-2} \oplus \langle T(x_1), \cdots, T(x_r) \rangle = W_{i-1}$ になるとは限らない。

(**[補題 14-3-2] の証明**)

各 $T(x_j)$ について $T^{i-1}(T(x_j)) = T^i(x_j) = 0$ となるから、$T(x_j) \in W_{i-1}$ である。"$T(x_1), \cdots, T(x_r)$" が一次独立であることを示す。

$$\sum_{j=1}^{r} c_j T(x_j) = 0 \qquad (c_j \in \mathbb{K})$$

とおく。左辺は $T\left(\sum_{j=1}^{r} c_j x_j\right)$ と書き換えられるから、$i \geq 2$ より $\sum_{j=1}^{r} c_j x_j \in W_1 \subset W_{i-1}$ となる。$x_1, \cdots, x_r$ の選び方より、$W_{i-1} \cap \langle x_1, \cdots, x_r \rangle = \{0\}$ であるから、$\sum_{j=1}^{r} c_j x_j = 0$ を得る。"$x_1, \cdots, x_r$" は一次独立なので、$c_j = 0\ (j = 1, \cdots, r)$ を得る。故に、"$T(x_1), \cdots, T(x_r)$" は一次独立である。

$W_{i-2} \cap \langle T(x_1), \cdots, T(x_r) \rangle = \{0\}$ となることを示す。任意に $x \in W_{i-2} \cap \langle T(x_1), \cdots, T(x_r) \rangle$ をとると、$x = \sum_{j=1}^{r} c_j T(x_j)\ (c_j \in \mathbb{K})$ と書ことができる。$x \in W_{i-2}$ より

$$T^{i-2}\left(\sum_{j=1}^{r} c_j T(x_j)\right) = 0, \quad \text{すなわち、} T^{i-1}\left(\sum_{j=1}^{r} c_j x_j\right) = 0$$

となる。よって、$\sum_{j=1}^{r} c_j x_j \in W_{i-1}$ である。先程と同様に $c_j = 0\ (j = 1, \cdots, r)$ がわかるので、$x = 0$ である。 □

定理 14 - 3 - 3
$V\ (\neq \{0_V\})$ を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし、$T: V \longrightarrow V$ を冪零指数 k の冪零変換とする。

$$d_i = \dim \mathrm{Ker}\, T^i - \dim \mathrm{Ker}\, T^{i-1} \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

とおくと、次が成り立つ。

(14 - 3 b) $$d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_k \geq 1,$$

(14 - 3 c) $$d_1 + d_2 + \cdots + d_k = \dim V.$$

(証明)
$W_i = \mathrm{Ker}\, T^i\ (i = 0, 1, 2, \cdots)$ とおく。$2 \leq i \leq k$ を 1 つ固定し、W_i の一次独立なベクトルの列 "$x_1, \cdots, x_r$" を $W_{i-1} \oplus \langle x_1, \cdots, x_r \rangle = W_i$ となるように選ぶ。このとき、[補題 14 - 3 - 2] とその下の注意から、"$T(x_1), \cdots, T(x_r)$" は一次独立な W_{i-1} のベクトルの列であって、$W_{i-2} \oplus \langle T(x_1), \cdots, T(x_r) \rangle \subset W_{i-1}$ となる。よって、

$$d_{i-1} = \dim W_{i-1} - \dim W_{i-2} \geq r = \dim W_{i-1} - \dim W_i = d_i$$

を得る。したがって、$d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_k$ である。

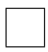
次に、$d_k \geq 1$ を示そう。k は T の冪零指数であるから、$W_{k-1} \subsetneqq W_k$ である。したがって、$d_k = \dim W_k - \dim W_{k-1} \geq 1$ である。

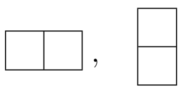
最後に、(14 - 3 c) を示す。これは次のように示される：

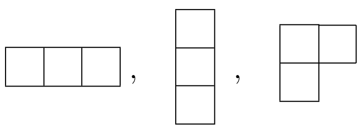
$$d_1 + d_2 + \cdots + d_k = \dim(\mathrm{Ker}\, T^k) - \dim(\mathrm{Ker}\, T^0) = \dim V - \dim(\mathrm{Ker}\, \mathrm{id}_V) = \dim V. \quad \square$$

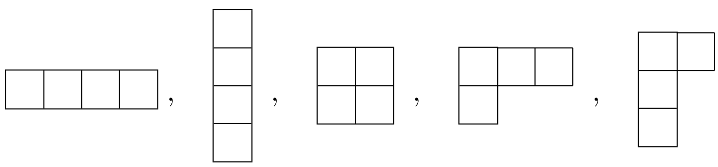
● 14 - 4 : 冪零変換が定める Young 図形

冪零変換の Jordan 標準形は、Young 図形と対応している。**Young 図形**とは、(x, y)-座標平面上の不等式 $x \geq 0,\ y \leq 0$ で表わされる領域に、1 辺の長さが 1 の正方形を、左上の原点から、右と下に向かって重ならないように隙間なく有限個詰めて得られる図形のことをいう。ただし、第 n 行にある正方形ある正方形の個数を d_n とおくとき、$d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_k > 0$ かつ $d_{k+1} = d_{k+2} = \cdots = 0$ を満たすものとする。k を Young 図形の**長さ**という。また、正方形の個数が n であるような Young 図形を n 次の Young 図形という。

例 14 - 4 - 1 (1) 1 次の Young 図形 

(2) 2 次の Young 図形 

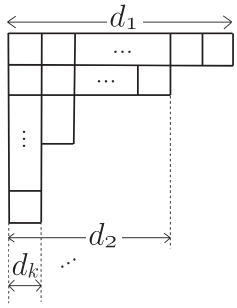
(3) 3 次の Young 図形 

(4) 4 次の Young 図形 

$V\ (\neq \{0_V\})$ を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし、$T: V \longrightarrow V$ を冪零指数 k の冪零変換とする。

$$W_i = \mathrm{Ker}\, T^i \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots),$$
$$d_i = \dim W_i - \dim W_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

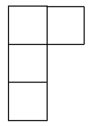
とおくと、[定理 14 - 3 - 3] により、$d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_k > 0$ かつ $d_{k+1} = d_{k+2} = \cdots = 0$ となる。したがって、長さ k の次のような Young 図形 Young(T) が定まる。

Young(T) $=$ 

これを冪零変換 $T : V \longrightarrow V$ が定める Young 図形と呼ぶ。

● 14 - 5 : フィルトレーションに適合する基底

冪零変換 $T : V \longrightarrow V$ の行列表示が Jordan 標準形となるような V の基底は、Young 図形 Young(T) に「当てはめて」作ることができる。その作り方を、例を使って説明しよう。



例 14 - 5 - 1 冪零変換 $T : V \longrightarrow V$ であって、それが定める Young 図形が右の形になるものを考える。$W_i = \mathrm{Ker}\, T^i,\ d_i = \dim W_i - \dim W_{i-1}$ とおくと、$d_3 = 1,\ d_2 = 1,\ d_1 = 2$ である。

$\dim W_3 - \dim W_2 = d_3 = 1$ であるから、

$$\boxed{W_3 = W_2 \oplus \langle v \rangle}$$

となる $v \in V$ が存在する。すると、[補題 14 - 3 - 2] から、$W_2 \supset W_1 \oplus \langle T(v) \rangle$ となる。$\dim W_2 - \dim W_1 = d_2 = 1$ であり、$\dim\langle T(v) \rangle = 1$ であるから、

$$\boxed{W_2 = W_1 \oplus \langle T(v) \rangle}$$

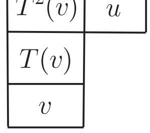
であることがわかる。よって、再び [補題 14 - 3 - 2] から、$W_1 \supset W_0 \oplus \langle T^2(v) \rangle$ となる。今度は $\dim W_1 - \dim W_0 = d_1 = 2$ であり $\dim\langle T^2(v) \rangle = 1$ であるから、

$$\boxed{W_1 = W_0 \oplus \langle T^2(v), u \rangle}$$

となる $u \in W_1$ が存在する。$W_0 = \{0\}, W_3 = V$ に注意すると、

$$V = W_3 = \langle T^2(v), u \rangle \oplus \langle T(v) \rangle \oplus \langle v \rangle$$

がわかる。



今、$\mathscr{B} =$ “$T^2(v), T(v), v, u$” は V の基底をなすが、これを Young(T) に右図のように当てはめることができる。この基底に関する T の行列表示は次のようになる：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = J(0,3) \oplus J(0,1)$$

□

[例 14 - 5 - 1] を一般の場合に書き直せば、冪零変換の場合の [定理 14 - 1 - 1] の証明が得られる (詳細は教科書を参照)。

No.14 2025 年 12 月 25 日

線形代数 4 事前練習用演習問題

pre14-1. 行列 $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ によって定まる線形変換 $T_N : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4$ について、以下の問いに答えよ。

(1) T_N は冪零変換であることを示せ。

(2) T_N はどんな Jordan 標準形を持つか？

(3) T_N の行列表示が Jordan 標準形になるような $\mathbb{C}^4$ の基底を一組求めよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

---

pre14-1. (1) “$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$” を $\mathbb{C}^4$ の標準基底とする。

$$\begin{cases} T_N(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4, \\ T_N(\mathbf{e}_2) = \mathbf{0}, \\ T_N(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_4, \\ T_N(\mathbf{e}_4) = \mathbf{0} \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{cases} T_N^2(\mathbf{e}_1) = T_N(\mathbf{e}_2) + T_N(\mathbf{e}_4) = \mathbf{0}, \\ T_N^2(\mathbf{e}_2) = T_N(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \\ T_N^2(\mathbf{e}_3) = T_N(\mathbf{e}_4) = \mathbf{0}, \\ T_N^2(\mathbf{e}_4) = T_N(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \end{cases}$$

となる。したがって、T_N は冪零指数 2 の冪零変換である。

(2)
$$\dim(\mathrm{Ker}\, T_N) = 4 - \mathrm{rank}\, N = 4 - 2 = 2,$$
$$\dim(\mathrm{Ker}\, T_N^2) = 4 - \mathrm{rank}\, N^2 = 4 - 0 = 4$$

であるから、$d_i = \dim(\mathrm{Ker}\, T_N^i) - \dim(\mathrm{Ker}\, T_N^{i-1})$ $(i = 1, 2)$ とおくと、

$$d_1 = 2, \quad d_2 = 2$$

である。これより、T_N が定める Young 図形 $\mathrm{Young}(T_N)$ は次のようになる。

$$\mathrm{Young}(T_N) \ = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

この形から、T_N の Jordan 標準形は

$$J(0, 2) \oplus J(0, 2) = \left(\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となることがわかる。

(3) $W_i = \mathrm{Ker}\, T_N^i$ $(i = 1, 2)$ とおくと、$W_1 \subset W_2 = \mathbb{C}^4$ であり、$\dim W_1 = 2$, $\dim W_2 = 4$ である。したがって、$\mathbb{C}^4 = W_1 \oplus \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ を満たす $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{C}^4$ が存在する。このとき、$\mathrm{Young}(T_N)$ に適合する $W_2 = \mathbb{C}^4$ の基底 $\mathscr{B} =$ “$T_N(\mathbf{v}_1), \mathbf{v}_1, T_N(\mathbf{v}_2), \mathbf{v}_2$” が得られる。

$T(\mathbf{v}_1)$	$T(\mathbf{v}_2)$
$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$

この基底 $\mathscr{B}$ に関する T_N の行列表示は Jordan 標準形 $J(0,2) \oplus J(0,2)$ になる。

$\mathscr{B}$ を具体的に求めるためには、$\mathbb{C}^4 = W_1 \oplus \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ を満たす $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{C}^4$ を求めればよい。連立一次方程式 $N\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の複素数解を求めることにより、

$$W_1 = \{\ s\mathbf{e}_2 + t\mathbf{e}_4 \mid s, t \in \mathbb{C}\ \}$$

がわかる。よって、$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1,\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_3$ ととれば、$\mathbb{C}^4 = W_1 \oplus \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ が満たされる。

$$T_N(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4, \quad T_N(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_4$$

より、T_N の行列表示が Jordan 標準形 $J(0,2) \oplus J(0,2)$ となるような $\mathbb{C}^4$ の基底の一組は、

“$\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3$”

である。

線形代数４・第 14 回 (2025 年 12 月 25 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数４・第 14 回学習内容チェックシート 2025 年 12 月 25 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. (1) $\alpha \in \mathbb{K}$ と $m \in \mathbb{N}$ に対して、Jordan ブロック $J(\alpha, m)$ とはどのような行列か？

$$J(\alpha, m) =$$

(2) Jordan 行列とはどのような行列のことをいうか。

Q2. V $(\neq \{0_V\})$ を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間、T を V 上の $\mathbb{K}$-線形変換とする。

(1) T が冪零であることの定義を書け。さらに、T が冪零であるときの冪零指数の定義を書け。

[冪零であることの定義]：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

[冪零指数の定義]：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(2) T は冪零指数 k の冪零変換であるとし、

$$d_i := \dim(\mathrm{Ker}\, T^i) - \dim(\mathrm{Ker}\, T^{i-1}) \qquad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

とおく。

(i) $d_1, \cdots, d_k$ はどのような不等式および等式を満たすか。

[不等式]：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

[等式]：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(ii) $k = 2,\ d_1 = 3,\ d_2 = 1$ のとき、T が定める Young 図形 Young(T) と T の Jordan 標準形をそれぞれ求めよ。

Young(T) = 　　　　　　　T の Jordan 標準形

(iii) $W_i = \mathrm{Ker}\, T^i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ とおく。(ii) の状況の下で、T の Jordan 標準形を与える V の基底の構成方法を説明せよ。

Q3. 第 14 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。