

## §14. 広義積分

今までは、連続関数の閉区間上での積分について考えてきた。ここでは、閉区間とは限らない区間、例えば、半開閉区間  $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$  上での積分について考える。このような積分を広義積分と呼ぶ。重要な数や関数は広義積分の形で与えられることが多い。広義積分を定義するには、関数の右側極限 (あるいは左側極限) の概念が必要である。

### ● 14-1 : 右側極限と左側極限

$f(x)$  を  $\mathbb{R}$  の部分集合  $S$  上で定義されている関数とし、 $a$  を次の条件を満たす実数とする :

$$(14-1 \text{ a}) \quad a < x_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{かつ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

を満たす  $S$  内の数列  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  が少なくとも 1 つ存在する。この条件を満たす  $S$  内のどのような数列  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  に対しても、数列  $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$  がある一定の実数  $\alpha$  に収束するならば、 $f(x)$  は  $x \rightarrow a+0$  のとき**収束する**といい、その定数  $\alpha$  を  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  により表わす :  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha$ 。 $\alpha$  を関数  $f(x)$  ( $x \in S$ ) の  $a$  における**右側極限**と呼ぶ。

「 $a < x_n$ 」を「 $a > x_n$ 」に置き換えて、上と同じ主張が成立するとき、 $f(x)$  は  $x \rightarrow a-0$  のとき**収束する**といい、 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha$  を  $f(x)$  ( $x \in S$ ) の  $a$  における**左側極限**と呼ぶ。

**例 14-1-1**  $\alpha > 0$  のとき、 $\lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha = 0$  となる。

(証明)

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  を 0 に収束し、かつ、 $0 < x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を満たす任意の数列とする。冪関数の定義より、

$$x^\alpha = \exp(\alpha \log x)$$

であるが、 $n \rightarrow \infty$  のとき、 $x_n$  は限りなく 0 に近づいていくから、 $\log x_n$  はいくらでも大きな負の数になり、 $\alpha > 0$  なので、 $x_n^\alpha = \exp(\alpha \log x_n)$  は限りなく 0 に近づいていく。これで、0 に収束し、かつ、 $0 < x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を満たす任意の数列  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^\alpha = 0$  であることが示された。よって、 $\lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha = 0$  である。  $\square$

### ● 14-2 : 有限半開閉区間上での広義積分

$a, b$  を  $a < b$  なる実数とする。半開閉区間  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$  を定義域に含む連続関数  $f(x)$  に対して、右側極限  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$  が存在するとき、 $f(x)$  は  $[a, b)$  上で**広義積分可能**であるといい、その極限を  $\int_a^b f(x) dx$  によって表わす :

$$(14-2 \text{ a}) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

同様に、半開閉区間  $(a, b]$  を定義域に含む連続関数  $f(x)$  に対して、右側極限  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$  が存在するとき、 $f(x)$  は  $(a, b]$  上で広義積分可能であるといい、その極限を  $\int_a^b f(x) dx$  によって書き表わす :

$$(14-2 \text{ b}) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

左側極限や右側極限が存在するしないに関わらず、 $\int_a^b f(x) dx$  という記号を使い、これを**広義積分**と呼ぶことがある。この場合、右側極限  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$  が存在するとき、この広義積分は**収束する**という。同様に、右側極限  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$  が存在するとき、この広義積分は**収束する**という。

**例 14-2-1** 広義積分  $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$  が存在するならば、その値を求めよ。

解；

広義積分が存在するかどうかを、実際に積分を計算することにより調べる。

$$(-\sqrt{1-x^2})' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

であるから、十分小さい  $\varepsilon > 0$  に対して

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = [-\sqrt{1-x^2}]_0^{1-\varepsilon} = -\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2} + 1$$

となる。したがって、与えられた広義積分は存在し、その値は

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (-\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2} + 1) = 1$$

である。 □

閉区間  $[a, b]$  上で定義されている連続関数  $f(x)$  に対して、

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad G(x) = \int_x^b f(t) dt \quad (x \in [a, b])$$

によって定義される関数  $F(x), G(x)$  を考える。微積分学の基本定理により、これらの関数は微分可能なので、連続である。したがって、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} F(b-\varepsilon) = F(b),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} G(a+\varepsilon) = G(a)$$

となり、閉区間上で定義された連続関数に対して広義積分は定積分に一致する。このことから、広義積分は定積分の拡張概念であると言える。

### ● 14-3：無限半開閉区間上での広義積分

$a$  を実数とする。半開閉区間  $[a, +\infty)$  を定義域に含む連続関数  $f(x)$  に対して、極限  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x) dx$  が存在するとき、 $f(x)$  は  $[a, +\infty)$  上で**広義積分可能**であるといい、その極限を  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  によって表わす：

$$(14-3 a) \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x) dx.$$

同様に、半開閉区間  $(-\infty, a]$  を定義域に含む連続関数  $f(x)$  に対して、極限  $\lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^a f(x) dx$  が存在するとき、 $f(x)$  は  $(-\infty, a]$  上で**広義積分可能**であるといい、その極限を  $\int_{-\infty}^a f(x) dx$  によって書き表わす：

$$(14-3 b) \quad \int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^a f(x) dx.$$

● 14-4 : 広義積分可能性の判定条件

広義積分可能であるかどうかを調べる際に、積分を計算することができない場合も多い。そのようなときには次の定理が役に立つ。

定理 14-4-1

(1)  $I = [a, b)$  (resp.  $I = (a, b]$ ) 上で定義されている連続関数  $f(x)$  に対して

$$(14-4 a) \quad \text{すべての } x \in [a, b) \text{ に対して } 0 \leq f(x) \leq \frac{M}{(b-x)^\alpha}$$

$$\left( \text{resp. すべての } x \in (a, b] \text{ に対して } 0 \leq f(x) \leq \frac{M}{(x-a)^\alpha} \right)$$

となるような実数  $\alpha < 1$  と  $M > 0$  が存在するならば、 $f(x)$  は  $I$  上で広義積分可能である。

(2)  $I = [a, +\infty)$  ( $a > 0$ ) 上で定義されている連続関数  $f(x)$  に対して

$$(14-4 b) \quad \text{すべての } x \in I \text{ に対して } 0 \leq f(x) \leq \frac{M}{x^\alpha}$$

となるような実数  $\alpha > 1$  と  $M > 0$  が存在するならば、 $f(x)$  は  $I$  上で広義積分可能である。

例えば、(2) のときを考えよう。 $R \in I$ ,  $R > a$  を満たす実数とする。このとき、

$$0 \leq f(x) \leq \frac{M}{x^\alpha}$$

を  $a$  から  $R$  まで積分して

$$0 \leq \int_a^R f(x) dx \leq \int_a^R \frac{M}{x^\alpha} dx = \left[ \frac{M}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \right]_a^R = \frac{M}{1-\alpha} (R^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) < \frac{M}{\alpha-1} a^{1-\alpha}$$

を得る (最初の不等式の評価で  $R > a$  を、最後の不等式の評価で  $1 - \alpha < 0$  を使った)。さて、 $f(x) \geq 0$  であるから、 $R$  を  $+\infty$  に近づけていくとき積分  $\int_a^R f(x) dx$  の値は増え続けるが、上の不等式より、その値はいつまでたっても  $\frac{M}{\alpha-1} a^{1-\alpha}$  を超えない。したがって、上に有界な単調増加数列が極限を持つことと同じ理由で、

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x) dx$$

は  $\frac{M}{\alpha-1} a^{1-\alpha}$  以下のある値に収束することがわかる。

例 14-4-2 任意の  $s > 0$  に対して、広義積分

$$(14-4 c) \quad \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

は収束する。関数  $\Gamma(s)$  ( $s > 0$ ) を **ガンマ関数** という。

(証明)

被積分関数  $f(x) = e^{-x} x^{s-1}$  の定義域は  $(0, +\infty)$  であるから、

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx = \int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

と考えると、右辺の各項が収束することを示す。

● 第1項について： $(0, 1]$  上で  $(x-0)^\alpha f(x) \leq M$  となる  $\alpha < 1$  と  $M > 0$  を見つければよい。  $x \in (0, 1]$  に対して、

$$(x-0)^\alpha f(x) = e^{-x} x^{\alpha+s-1} < x^{\alpha+s-1}$$

であるから、

$$\alpha = 1 - s, \quad M = 1$$

とおけば、 $s > 0$  より  $\alpha < 1$  であり、波線部分が満たされる。

• 第 2 項について： $[1, +\infty)$  上で  $x^\alpha f(x) \leq M$  となる  $\alpha > 1$  と  $M > 0$  を見つければよい。  
 $x > 0$  に対して、Maclaurin 展開より

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} > \frac{x^n}{n!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となるので、 $s+1 < n$  となる自然数  $n$  を一つとると、任意の  $x \in [1, +\infty)$  に対して

$$x^2 f(x) = e^{-x} x^{s+1} < e^{-x} x^n < n!$$

となる。よって、 $\alpha = 2$ ,  $M = n!$  ととればよい。

以上より、広義積分  $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$  は収束する。

**注意：**部分積分法を用いて、

$$(14-4 d) \quad \Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1) \quad (s > 1)$$

となることがわかる。実際、

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow +0}} \int_{\varepsilon}^R e^{-x} x^{s-1} dx \\ &= \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow +0}} [-e^{-x} x^{s-1}]_{\varepsilon}^R - \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow +0}} \int_{\varepsilon}^R -e^{-x} (s-1) x^{s-2} dx \\ &= \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow +0}} \left( -\frac{R^{s-1}}{e^R} + \frac{\varepsilon^{s-1}}{e^{\varepsilon}} \right) + (s-1)\Gamma(s-1) \\ &= (s-1)\Gamma(s-1). \end{aligned}$$

また、

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^R = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{e^R} + 1 \right) = 1$$

であるから、(14-4 d) より、自然数  $n$  に対して、 $\Gamma(n) = (n-1)!$  が成立することがわかる。  
 このことから、ガンマ関数は「自然数に対する階乗」を正の実数全体へ拡張したものとみることができる。

## 数学を学ぶ（微分積分1）第14回・学習内容チェックシート

学籍番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
関数 $f(x)$ ( $x \in S$ ) が $x \rightarrow a+0$ のとき収束するとは？	p.	
関数 $f(x)$ ( $x \in S$ ) の実数 $a$ における右側極限 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ とは？	p.	
連続関数 $f(x)$ が $(a, b]$ 上で広義積分可能であるとは？このとき、 $\int_a^b f(x)dx$ とは？	p.	
$(a, b]$ を定義域に含む連続関数 $f(x)$ に対し、広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ が収束するとは？	p.	

Q2. 次の  に適当な記号や数字・文字などを入れなさい。

- ガンマ関数とは、 $s > 0$  に対して

$$\Gamma(s) = \text{$$

のように定義される関数である。 $s > 1$  のとき、 $\Gamma(s)$  は  $\Gamma(s-1)$  を用いて  $\Gamma(s) = \text{$  と表わされる。 $\Gamma(1) = \text{$  であるから、自然数  $n$  に対する  $\Gamma(n)$  の値は  $\Gamma(n) = \text{$  である。

- 閉区間  $[a, b]$  上で定義された連続関数  $f(x)$  は半開閉区間  $(a, b]$  上で  可能であり、 $\int_a^b f(x)dx$  の値は  $f(x)$  の  $[a, b]$  上での  と一致する。

Q3.  $f(x)$  を  $[a, +\infty)$  上で定義された連続関数とします。

(1) 広義積分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  の値を求めるための1つの方法・手順を下の枠内に書きなさい。

(2) 広義積分を実際に求めることが困難な場合、判定法を使うと  $[a, +\infty)$  上で  $f(x)$  が広義積分可能であることがわかる場合があります。その際、どんな条件が成り立つことを確認しますか。

Q4. 第14回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。