§14. 広義重積分

ここでは、積分領域が有界閉集合でない場合や、関数が有界でない場合についての重積分を考える。主に、非負値 2 変数連続関数の広義重積分を扱う。関数 $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$ に対して $D=\{\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq 0\ \}$ 上の広義重積分を計算し、工学や統計学などで頻繁に登場する等式 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を導く。最後に付録として、これまでの知識を総動員して、ゼータ関数値 $\zeta(2)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ の値を計算する。

● 14 - 1 : $\mathbb{R}^2$ の部分集合の近似増加列

$[a,+\infty)$ 上で定義された 1 変数連続関数 $f(x)$ に対して、広義積分 $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ は、極限 $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_a^R f(x)\,dx$ により定義された。ここで、R を $+\infty$ に近づけることは、積分区間 $[a,R]$ を広げていくことに対応している。2 変数関数の場合、積分領域を広げていく仕方としてあらゆる方向が考えられるから、$\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_a^R$ の代わりに、近似増加列による極限を考えることになる。

定義 14 - 1 - 1

D を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とする。$\mathbb{R}^2$ の部分集合の列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ が D の**近似増加列**であるとは、以下の条件が満たされるときをいう：

① 各 D_n は面積確定有界閉集合である。

② $D_1\subset D_2\subset\cdots\subset D_n\subset D_{n+1}\subset\cdots\cdots\subset D.$

③ D に含まれるどのような有界閉集合 K についても、$K\subset D_n$ となる番号 n が存在する。

例 14 - 1 - 2 (1) $D=\{\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x\leq 1,\ 0<y\leq 1\ \}$ に対して、

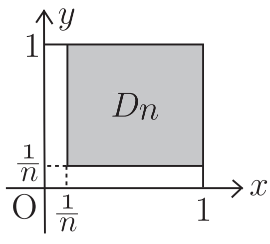
(14 - 1 a) $$D_n=\left\{\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{n}\leq x\leq 1,\ \frac{1}{n}\leq y\leq 1\ \right\}\qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

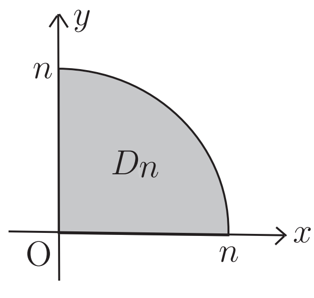
を考える。$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列である。

(2) $D=\{\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq 0\ \}$ に対して、

(14 - 1 b) $$D_n=\{\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq n^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0\ \}\qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

を考える。$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列である。





● 14 - 2 : 広義重積分

$f(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D 上で定義された連続関数とする。D の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ をどのように選んでも、重積分の列

(14 - 2 a) $$\int_{D_n} f(x,y)\,dxdy\qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

が、ある一定の値 γ に収束するとき、$f(x,y)$ は D 上で**広義重積分可能**であるといい、その極限を $\int_D f(x,y)\,dxdy$ で表わす：

$$\int_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\int_{D_n} f(x,y)\,dxdy. \tag{14-2 b}$$

注意 14-2-1 $f(x,y)$ が D 上で広義重積分可能であることを、広義重積分 $\int_D f(x,y)\,dxdy$ は**収束する**、と表現することもある。

D 上で $f(x,y)$ が非負の値をとる連続関数の場合、次の定理が成り立つ。

定理 14-2-2
$D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された連続関数 $f(x,y)$ がすべての点 $(x,y)\in D$ に対して $f(x,y)\geq 0$ を満たすとき、D のある近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ について極限

$$\lim_{n\to\infty}\int_{D_n} f(x,y)\,dxdy \tag{14-2 c}$$

が存在するならば、D の任意の近似増加列 $\{D'_n\}_{n=1}^{\infty}$ についても極限 $\lim_{n\to\infty}\int_{D'_n} f(x,y)\,dxdy$ は存在し、次の等式が成り立つ：

$$\lim_{n\to\infty}\int_{D'_n} f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\int_{D_n} f(x,y)\,dxdy.$$

● 14-3：定符号関数の広義重積分の計算

[定理 14-2-2] により、D 上で非負であるような連続関数 $f(x,y)$ に対しては、D のある近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ をとったときに、(14-2 c) の極限が存在するならば、その値が広義重積分 $\int_D f(x,y)\,dxdy$ の値になる。これを使った、広義重積分の計算例を与えよう。

例 14-3-1 $D = \{\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1,\ 0 < y \leq 1\ \}$ について、広義重積分

$$\int_D \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dxdy$$

を考える。D の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ として、[例 14-1-2](1) で与えたものをとることにより、

$$\int_D \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\int_{D_n}\frac{1}{\sqrt{xy}}\,dxdy = \lim_{n\to\infty} 4\left(1-\sqrt{\frac{1}{n}}\right)^2 = 4$$

となることがわかる。 □

● 14-4：広義重積分を用いた広義積分の計算

近似増加列の選び方を工夫すると、１変数関数の広義積分が計算できることがある。

例 14-4-1 $D = \{\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq 0\ \}$ について、

$$\int_D e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \frac{\pi}{4} \tag{14-4 a}$$

であり、したがって、

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{14-4 b}$$

(証明)

D の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ として、[例 14 - 1 - 2](2) で与えたものをとる。$E_n = \left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le r \le n,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \right\}$ とおくと、極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により

$$\int_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \int_{E_n} e^{-r^2} r\,drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^n re^{-r^2}\,dr \right) d\theta = \frac{\pi}{4}(1-e^{-n^2})$$

となる。これは $n \to +\infty$ のとき収束するから、

$$\int_D e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \int_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{4}(1-e^{-n^2}) = \frac{\pi}{4}.$$

次に、D の近似増加列として $D'_n = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le n,\ 0 \le y \le n \}$ をとると

$$\int_{D'_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \left(\int_0^n e^{-x^2}\,dx \right)\left(\int_0^n e^{-y^2}\,dy \right) = \left(\int_0^n e^{-x^2}\,dx \right)^2$$

であるから、

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^n e^{-x^2}\,dx \right)^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{D'_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \int_D e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \frac{\pi}{4}$$

を得る。１変数関数の収束判定条件より、広義積分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ は収束するので、上式の左辺は $\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \right)^2$ に等しい。よって、(14 - 4 b) を得る。 □

● 14 - 5 : ゼータ関数値 $\zeta(2)$ の値

広義重積分を応用して、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ の和の値を求めよう。

例 14 - 5 - 1 $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x < 1,\ 0 \le y < 1 \}$ とおくとき、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \int_D \frac{1}{1-x^2y^2}\,dxdy = \frac{\pi^2}{8}$$

(証明)

- x が $|x| < 1$ なる実数のとき、任意の自然数 n に対して、

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

と表わせるから、$(x,y) \in D$ に対して、

(※) $$\frac{1}{1-x^2y^2} = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}y^{2k} + \frac{x^{2(n+1)}y^{2(n+1)}}{1-x^2y^2}$$

が成り立つ。D の近似増加列として、

$$D_m = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le 1 - \frac{1}{m},\ 0 \le y \le 1 - \frac{1}{m} \right\} \qquad (m = 1,2,3,\cdots)$$

を考える。このとき、

$$\int_{D_m} \frac{1}{1-x^2y^2}\,dxdy = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^{1-\frac{1}{m}} x^{2k}\,dx \right)^2 + \int_{D_m} \frac{x^{2(n+1)}y^{2(n+1)}}{1-x^2y^2}\,dxdy$$

である。ここで、

$$\int_{D_m} \frac{x^{2(n+1)}y^{2(n+1)}}{1-x^2y^2}\,dxdy \le \int_{D_m} \frac{x^{2(n+1)}y^{2(n+1)}}{1-(1-\frac{1}{m})^4}\,dxdy = \frac{1}{1-(1-\frac{1}{m})^4}\Big(\int_0^{1-\frac{1}{m}} x^{2n+2}\,dx\Big)^2$$
$$\le \frac{1}{1-(1-\frac{1}{m})^4}\Big(\int_0^1 x^{2n+2}\,dx\Big)^2 = \frac{1}{1-(1-\frac{1}{m})^4}\cdot\frac{1}{(2n+3)^2}$$

となるので、$n\to\infty$ のとき、これは 0 に収束する。よって、

$$\int_D \frac{1}{1-x^2y^2}\,dxdy = \lim_{m\to\infty}\int_{D_m}\frac{1}{1-x^2y^2}\,dxdy \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\Big(\int_0^{1-\frac{1}{m}} x^{2k}\,dx\Big)^2$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{1}{2k+1}\Big)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

を得る (注：$(*)$ の部分は慎重な議論を必要とする)。

• $U = \left\{ (u,v)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\le u<\frac{\pi}{2},\ 0\le v<\frac{\pi}{2} \right\}$ 上の写像 $F: U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$F(u,v) = \Big(\frac{\sin u}{\cos v},\ \frac{\sin v}{\cos u}\Big)$$

により定義する。F は C^1-級であり、F によって、U と D とは 1 対 1 に対応する。したがって、任意の自然数 n に対して、F は、面積確定有界閉集合

$$E_n = \left\{ (u,v)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\le u,\ 0\le v,\ u+v\le\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n} \right\}$$

から面積確定有界閉集合 $D_n = F(E_n)$ への変数変換を与える。任意の $(u,v)\in U$ に対して

$$J_F(u,v) = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\cos u}{\cos v} & \dfrac{\sin u\sin v}{\cos^2 v} \\ \dfrac{\sin v\sin u}{\cos^2 u} & \dfrac{\cos v}{\cos u} \end{pmatrix} = 1-\frac{\sin^2 v\sin^2 u}{\cos^2 u\cos^2 v}$$

であるから、変数変換公式により、次式を得る：

$$\int_{D_n}\frac{1}{1-x^2y^2}\,dxdy = \int_{E_n}\frac{1}{1-\big(\frac{\sin u}{\cos v}\big)^2\big(\frac{\sin v}{\cos u}\big)^2}\cdot\Big(1-\frac{\sin^2 v\sin^2 u}{\cos^2 u\cos^2 v}\Big)\,dudv = \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\Big)^2.$$

$n\to\infty$ のとき、これは収束するから、広義重積分 $\displaystyle\int_D\frac{1}{1-x^2y^2}\,dxdy$ は存在し、その値は、

$$\int_D\frac{1}{1-x^2y^2}\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\int_{D_n}\frac{1}{1-x^2y^2}\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\Big)^2 = \frac{\pi^2}{8}. \qquad \square$$

[例 14 - 5 - 1] を用いて、

(14 - 5 a)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

を証明しよう。自然数 n に対して、

$$\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

である。この両辺の極限をとって、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

を得る。したがって、[例 14 - 5 - 1] により、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2026 年 1 月 7 日

数学を学ぶ（微分積分２）第 14 回・学習内容チェックシート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $D = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1,\ 0 < y \leq 1\ \}$ に対して、その近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を 2 つ与えて、図示しなさい (式で表わしにくい場合には図だけで構いません)。

D_n の例 1	D_n の例 2

Q2. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
D 上で定義された連続関数 $f(x, y)$ が D 上で広義重積分可能である (または収束する) とは？	p.	

Q3. 次の $\boxed{}$ に適当な言葉や数式を入れなさい。

- D 上で定義された連続関数 $f(x, y)$ が条件

$$\boxed{}$$

を満たすとき、極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{D_n} f(x, y)dxdy$ が存在するような D の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ が 1 つ見つかれば、その極限の値が $f(x, y)$ の D 上での広義重積分の値になる。

- $D = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0\ \}$ の近似増加列として

$$D_n = \boxed{} \quad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

を用いると、$\displaystyle\int_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \frac{\pi}{4}$ と計算される。一方、D の近似増加列として

$$D'_n = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq n,\ 0 \leq y \leq n\ \} \quad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

を用いると、$\displaystyle\int_{D'_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \left(\boxed{}\right)^2$ となることから、1 変数関数 $f(x) = e^{-x^2}$ $(x \geq 0)$ の広義積分の値が $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \boxed{}$ と求まる。

- 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ の和を $\zeta(2)$ とおくと、$\zeta(2) = \boxed{}$ である。

Q5. 第 14 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。