§15. Jordan 標準形とその応用

前節では冪零変換の Jordan 標準形の求め方を学んだ。この節では、一般の三角化可能な線形変換の Jordan 標準形の求め方とその理論の微分方程式への応用を学ぶ。以下、$\mathbb{K}$ はいつものように体を表わす。

● 15 - 1 : Jordan 標準形 (復習)

$\alpha \in \mathbb{K}$ に対して、m 次正方行列

(15 - 1 a)
$$J(\alpha, m) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & \text{O} & \\ & \alpha & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \text{O} & & \alpha & 1 \\ & & & & \alpha \end{pmatrix}$$

を **Jordan ブロック**または **Jordan 細胞**という。有限個の Jordan ブロックの直和として与えられる行列を **Jordan 行列**という。

定理 15 - 1 - 1
V $(\neq \{0_V\})$ を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし、$T : V \longrightarrow V$ を三角化可能な $\mathbb{K}$-線形変換とする。このとき、V の基底 $\mathscr{B}$ を適当に選ぶと、$\mathscr{B}$ に関する T の行列表示は Jordan 行列になる。その行列を T の **Jordan 標準形**という。

上の定理を行列だけを使って表現しなおすと、次の形になる。

系 15 - 1 - 2
n 次正方行列 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ が $\mathbb{K}$ 上三角化可能ならば、$P^{-1}AP$ が Jordan 行列となるような正則行列 $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ が存在する。その Jordan 行列を A の **Jordan 標準形**という。

注意. 線形変換および正方行列の Jordan 標準形は、直和の順番を無視すれば一意的である。

例 15 - 1 - 3 正方行列 A の固有多項式が $\varDelta_A(x) = (x-1)^3(x-2)^2$ であるとしよう。このとき、考えられ得る A の Jordan 標準形をすべて求めよう。但し、直和の順番の入れ替えで移りあうものは同じ Jordan 標準形とみなすことにする。

$\varDelta_A(x)$ の形から、A の Jordan 標準形は対角線上に 1 が 3 個、2 が 2 個でなければならない。対角線上に 1 が 3 個並ぶ 3 次 Jodran 行列は次の 3 種類ある：

$$J(1,3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J(1,2) \oplus J(1,1) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad J(1,1)^{\oplus 3} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

対角線上に 2 が 2 個並ぶ 2 次 Jodran 行列は次の 2 種類ある：

$$J(2,2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad J(2,1) \oplus J(2,1) = \left(\begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ \hline 0 & 2 \end{array}\right)$$

よって、 $\varDelta_A(x) = (x-1)^3(x-2)^2$ となるような正方行列 A の Jardan 標準形としては、直和の順番の入れ替えで移りあうものを無視すると、次の 6 $(= 3 \times 2)$ 個の可能性が考えられる。

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \hline & & & 2 & 1 \\ & & & 0 & 2 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \hline & & & 2 & \\ \hline & & & & 2 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ \hline & & 1 & & \\ \hline & & & 2 & 1 \\ & & & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 2 & 1 \\ & & & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}$$

● 15 - 2 : [定理 15 - 1 - 1] の証明の方針

[定理 15 - 1 - 1] の厳密な証明は教科書に譲り、ここでは証明の方針のみを示す。

$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ を T の相異なる固有値の全体とする。[定理 13 - 2 - 2] により、V は広義固有空間の直和に分解される：$V = \tilde{W}(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus \tilde{W}(\alpha_r)$. [補題 13 - 1 - 1] により、各 $\tilde{W}(\alpha_j)$ は T-不変であるから、線形変換 $T|_{\tilde{W}(\alpha_j)} : \tilde{W}(\alpha_j) \longrightarrow \tilde{W}(\alpha_j)$ が定義され、

$$T = T|_{\tilde{W}(\alpha_1)} \oplus \cdots \oplus T|_{\tilde{W}(\alpha_r)}$$

となる。ここで、[補題 13 - 4 - 1] により、$T|_{\tilde{W}(\alpha_j)}$ の固有値は α_j のみである。したがって、[定理 15 - 1 - 1] は、固有値が 1 つだけの $\mathbb{K}$-上三角化可能な線形変換の場合に帰着される。

さらに、[定理 15 - 1 - 1] は、固有値が 0 だけしか持たない場合、すなわち、冪零変換の場合に帰着される。実際、$T : V \longrightarrow V$ の固有値が α だけのとき、$T - \alpha \mathrm{id}_V$ は冪零変換である。V の基底 $\mathscr{B}$ に関する $T - \alpha \mathrm{id}_V$ の行列表示が Jordan 標準形 $J(0, m_1) \oplus \cdots \oplus J(0, m_l)$ であれば、同じ基底 $\mathscr{B}$ に関する T の行列表示も Jordan 標準形 $J(\alpha, m_1) \oplus \cdots \oplus J(\alpha, m_l)$ となる。

● 15 - 3 : Jordan 標準形の求め方

実例で説明する。

<u>**例 15 - 3 - 1**</u> 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ の Jordan 標準形と、A を Jordan 標準形に変換する正則行列 P を 1 つ求めよう。

まず、固有値を求める。計算により、$\varDelta_A(x) = (x-3)(x-1)^2$ となるから、A は $\mathbb{R}$ 上三角化可能で、固有値は $1, 3$ である。

$T = T_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ の固有値 $\alpha = 1, 3$ に属する広義固有空間を $\tilde{W}(\alpha)$ とおく。[定理 13 - 5 - 1] により、$\dim \tilde{W}(1) = 2,\ \dim \tilde{W}(3) = 1$ とわかる。

• $\alpha = 1$ のとき：

$$A - E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 8 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad (A - E_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 20 & -12 & 4 \end{pmatrix}$$

であるから、$\dim(\mathrm{Ker}\, T_{(A-E_3)^2}) = 3 - \mathrm{rank}\,(A-E_3)^2 = 2 = \dim \tilde{W}(1)$ となる。したがって、

$$\tilde{W}(1) = \mathrm{Ker}\, T_{(A-E_3)^2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -5x + 3y \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

であり、$(T_{A-E_3})|_{\tilde{W}(1)} : \tilde{W}(1) \longrightarrow \tilde{W}(1)$ は冪零指数 2 の冪零変換である。

$$\dim(\mathrm{Ker}\, T_{A-E_3}) = 3 - \mathrm{rank}\,(A - E_3) = 1$$

より $(T_{A-E_3})|_{\tilde{W}(1)}$ が定める Young 図形は $\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \end{array}$ の形になる。$(T_A)|_{\tilde{W}(1)}$ が Jordan 標準形となるような $\tilde{W}(1)$ の基底を構成しよう。

まず、$(\mathrm{Ker}\, T_{A-E_3}) \oplus \langle \mathbf{v} \rangle = \tilde{W}(1)$ となる $\mathbf{v} \in \tilde{W}(1)$ を 1 つ選ぶ。

$$\mathrm{Ker}\,T_{A-E_3} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$$

に含まれないベクトルとして $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を選ぶと $(A - E_3)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるから、$\tilde{W}(1)$ の基底 "$(A - E_3)\mathbf{v}, \mathbf{v}$" に関する $T|_{\tilde{W}(1)} = (T_A)|_{\tilde{W}(1)} : \tilde{W}(1) \longrightarrow \tilde{W}(1)$ の行列表示は $J(1, 2)$ となる。

• $\alpha = 3$ のとき：$\dim \tilde{W}(3) = 1$ なので、冪零変換 $(T_{A-3E_3})|_{\tilde{W}(3)}$ が定める Young 図形は $\square$ であり、$\tilde{W}(3) = \mathrm{Ker}\,(A - 3E_3)$ である。よって、 $\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{u} \in \mathrm{Ker}\,(A - 3E_3)$ を 1 つ取れば、$\tilde{W}(3)$ の基底 "$\mathbf{u}$" に関する $T|_{\tilde{W}(3)} : \tilde{W}(3) \longrightarrow \tilde{W}(3)$ の行列表示は $J(3, 1)$ となる。

$$A - 3E_3 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \tilde{W}(3) = \mathrm{Ker}\,T_{A-3E_3} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\}$$

がわかるので、$\mathbf{u}$ として $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を取ろう。

以上から、A の Jordan 標準形は

$$J(1, 2) \oplus J(3, 1) = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & \\ 0 & 1 & \\ \hdashline & & 3 \end{array}\right)$$

であり、$P = ((A - E_3)\mathbf{v}\ \mathbf{v}\ \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}AP = J(1, 2) \oplus J(3, 1)$ となる。 □

● 15 - 4 : Jordan 標準形の定数係数線形微分方程式への応用

Jordan 標準形の理論を用いて、定数係数 k 階微分方程式が初期条件の下で一意的に解を持つことを証明することができる。

定理 15 - 4 - 1

$c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R}$ を定数とし、微分方程式

(15 - 4 a) $$\frac{d^k f}{dx^k} + c_1 \frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}} + \cdots + c_k f = 0$$

を考える。多項式 $x^k + c_1 x^{k-1} + \cdots + c_{k-1} x + c_k$ が $\mathbb{R}[x]$ において一次式の積に分解すると仮定する。このとき、任意の $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$ に対して、初期条件

$$\begin{pmatrix} f(0) \\ \frac{df}{dx}(0) \\ \vdots \\ \frac{df^{k-1}}{dx^{k-1}}(0) \end{pmatrix} = \mathbf{a}$$

を満たす (15 - 4 a) の解 f が一意的に存在し、"$\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$" を $\mathbb{R}^k$ の基底とし、f_i を

$$\begin{pmatrix} f_i(0) \\ \frac{df_i}{dx}(0) \\ \vdots \\ \frac{df_i^{k-1}}{dx^{k-1}}(0) \end{pmatrix} = \mathbf{u}_i$$

を満たす (15 - 4 a) の解とすると、"$f_1, \cdots, f_k$" は微分方程式 (15 - 4 a) の解全体のなすベクトル空間の基底を与える。

(**証明**)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} f \\ \frac{df}{dx} \\ \vdots \\ \frac{df^{k-1}}{dx^{k-1}} \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \text{O} & \\ & 0 & 1 & & \\ & \text{O} & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -c_k & -c_{k-1} & \cdots & -c_2 & -c_1 \end{pmatrix}$$ とおくと、連立微分方程式

(15 - 4 b) $$\frac{d\mathbf{x}}{dx} = A\mathbf{x}$$

が得られる。$\mathbf{x}$ が (15 - 4 b) の解であることと (15 - 4 a) の解であることとは同値である。

$\Delta_A(x) = x^k + c_1x^{k-1} + \cdots + c_{k-1}x + c_k$ であり、これは仮定により $\mathbb{R}[x]$ において一次式の積に分解するから、A は $\mathbb{R}$ 上三角化可能である。よって、$J := P^{-1}AP$ が Jordan 標準形となるような正則行列 $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ が存在する。$\mathbf{y}(x) = P^{-1}\mathbf{x}(x)$ とおくと、連立微分方程式 (15 - 4 b) は連立微分方程式

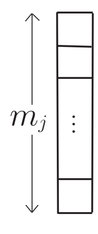
(15 - 4 c) $$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = J\mathbf{y}$$

に帰着される。Jordan ブロックごとに [定理 7 - 3 - 2](2) を (15 - 4 c) に適用して、任意の $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$ に対して $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$ となる (15 - 4 b) の解 $\mathbf{x}$ が一意的に存在することがわかる。同様にして、定理の後半の主張も示される。 □

微分方程式 (15 - 4 a) を満たす関数 $f = f(x)$ の全体からなるベクトル空間 $V = D(c_1, \cdots, c_k)$ の「よい」基底を探そう。“$f_1, \cdots, f_k$” を、[定理 15 - 4 - 1] において $\mathbb{R}^k$ の基底 “$\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$” を標準基底 “$\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_k$” にとったときの V の基底とする。このとき、“$f_1, \cdots, f_k$” に関する $T := \frac{d}{dx} : V \longrightarrow V$ の行列表示は、[定理 15 - 4 - 1] の証明における k 次正方行列 A になる。$\Delta_T(x) = \Delta_A(x) = x^k + c_1x^{k-1} + \cdots + c_{k-1}x + c_k$ より、A が $\mathbb{K}$ 上三角化可能なとき、V は

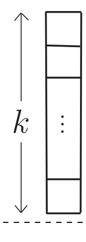
$$V = \tilde{W}(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus \tilde{W}(\alpha_r) \qquad (\alpha_1, \cdots, \alpha_r \text{ は } T \text{ の相異なる固有値})$$

のように広義固有空間分解される。このとき、[定理 13 - 5 - 1] より $\dim \tilde{W}(\alpha_j) = m_j$ である。一方、[例 10 - 1 - 2] より、T の固有値 α_j に属する固有空間 $W(\alpha_j)$ の次元は $\dim W(\alpha_j) = 1$ であるから、冪零変換 $(T - \alpha_j \mathrm{id}_V)|_{\tilde{W}(\alpha_j)}$ によって定まる Young 図形は



となる。これは次の補題からわかる。

補題 15 - 4 - 2
$V\ (\neq \{0_V\})$ を体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし、$T : V \longrightarrow V$ を冪零指数 k の冪零変換とする。もし、$\dim(\mathrm{Ker}T) = 1$ であれば、冪零変換 $T : V \longrightarrow V$ が定める Young 図形は次のようになる：



(証明)

$W_i = \mathrm{Ker}T^i$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$, $d_i = \dim W_i - \dim W_{i-1}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ とおくと、[定理 14-3-3] により、$d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_k > 0$ かつ $d_{k+1} = d_{k+2} = \cdots = 0$ となる。もし、$1 \leq i \leq k$ を満たすある整数 i に対して $d_i \geq 2$ であったとすると、

$$\dim(\mathrm{Ker}T) = \dim W_1 = d_1 \geq d_i \geq 2$$

となり、矛盾が生じる。よって、$1 \leq i \leq k$ を満たす任意の整数 i に対して $d_i = 1$ でなければならない。したがって、$\mathrm{Young}(T)$ は補題の図のようになる。 □

上のことから、T の固有値 α_j に属する広義固有空間 $\tilde{W}(\alpha_j)$ の基底を適当に選ぶと $T|_{\tilde{W}(\alpha_j)}$ は Jordan ブロック $J(\alpha_j, m_j)$ によって表わされることがわかる。$\tilde{W}(\alpha_j)$ のこのような基底として、

$$\text{“}e^{\alpha_j x},\ e^{\alpha_j x}x,\ e^{\alpha_j x}\frac{x^2}{2!},\ \cdots,\ e^{\alpha_j x}\frac{x^{m_j-1}}{(m_j-1)!}\text{”} \tag{15-4 d}$$

を取ることができる。実際、これらの関数は $\mathbb{R}$ 上一次独立である。さらに、

$$(T - \alpha_j \mathrm{id}_V)(e^{\alpha_j x}) = \frac{d}{dx}(e^{\alpha_j x}) - \alpha_j e^{\alpha_j x} = 0$$

であり、$1 \leq i < m_j$ に対して

$$(T - \alpha_j \mathrm{id}_V)\Big(e^{\alpha_j x}\frac{x^i}{i!}\Big) = \frac{d}{dx}\Big(e^{\alpha_j x}\frac{x^i}{i!}\Big) - \alpha_j e^{\alpha_j x}\frac{x^i}{i!} = e^{\alpha_j x}\frac{x^{i-1}}{(i-1)!}$$

を満たす。したがって、

$$(T - \alpha_j \mathrm{id}_V)^{m_j}\Big(e^{\alpha_j x}\frac{x^i}{i!}\Big) = 0$$

となる。よって、(15-4 d) の m_j 個の関数はすべて $\tilde{W}(\alpha_j)$ に属している。$\dim \tilde{W}(\alpha_j) = m_j$ であるから、(15-4 d) の m_j 個の関数は $\tilde{W}(\alpha_j)$ の基底になる。なお、$\tilde{W}(\alpha_j)$ の基底 (15-4 d) に関する $T|_{\tilde{W}(\alpha_j)} - \alpha_j \mathrm{id}_{\tilde{W}(\alpha_j)}$ の行列表示は、上の計算から $J(0, m_j)$ になるから、$\tilde{W}(\alpha_j)$ の基底 (15-4 d) に関する $T|_{\tilde{W}(\alpha_j)}$ の行列表示は $J(0, m_j) + \alpha_j E_{m_j} = J(\alpha_j, m_j)$ である。

以上より、次の定理が得られた。

定理 15-4-3

$c_1, \cdots, c_k$ を実定数とする k 次多項式 $x^k + c_1 x^{k-1} + \cdots + c_{k-1}x + c_k$ は

$$x^k + c_1 x^{k-1} + \cdots + c_{k-1}x + c_k = (x - \alpha_1)^{m_1} \cdots (x - \alpha_r)^{m_r}$$

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_r \text{ は相異なる実数、} m_1, \cdots, m_r \text{ は自然数})$$

のように $\mathbb{R}[x]$ において一次式の積に分解すると仮定する。このとき、微分方程式

$$\frac{d^k f}{dx^k} + c_1 \frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}} + \cdots + c_k f = 0$$

を満たす $\mathbb{R}$ 上の任意の関数 $f = f(x)$ は次の関数の一次結合として一意的に表わされる：

$$e^{\alpha_1 x},\ e^{\alpha_1 x}x,\ e^{\alpha_1 x}\frac{x^2}{2!},\ \cdots,\ e^{\alpha_1 x}\frac{x^{m_1-1}}{(m_1-1)!},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e^{\alpha_r x},\ e^{\alpha_r x}x,\ e^{\alpha_r x}\frac{x^2}{2!},\ \cdots,\ e^{\alpha_r x}\frac{x^{m_r-1}}{(m_r-1)!}.$$

例 15 - 4 - 4 微分方程式 $f'' + 2f' + f = 0$ を満たす $\mathbb{R}$ 上の関数 $f = f(x)$ であって、$f(0) = 1,\ f'(0) = -2$ を満たすものを上の定理を利用して求めよう。

$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ であるから、微分方程式 $f'' + 2f' + f = 0$ を満たす $\mathbb{R}$ 上の任意の関数 $f = f(x)$ は

$$e^{-x}, \quad xe^{-x}$$

の一次結合として一意的に表わされる。そこで、c_1, c_2 を実数として

$$f(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

とおく。

$$f'(x) = (-c_1 + c_2)e^{-x} - c_2 x e^{-x}$$

であり、$f(0) = 1,\ f'(0) = -2$ より、

$$\begin{cases} 1 = c_1, \\ -2 = -c_1 + c_2 \end{cases}$$

が成り立つ。この連立一次方程式を解いて、$c_1 = 1,\ c_2 = -1$ を得る。故に、

$$f(x) = e^{-x} - xe^{-x}$$

である。 □

[定理 15 - 4 - 3] と同様の結果が、$c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{K}$ を定数とする漸化式

$$a_{n+k} + c_1 a_{n+k-1} + \cdots + c_k a_n = 0 \ \ (n = 1, 2, \cdots)$$

を満たす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対しても成立する。[定理 15 - 4 - 3] と同様にして証明することができるので、ここでは結果のみを記す。

定理 15 - 4 - 5

$c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{K}$ を定数とする k 次多項式 $x^k + c_1 x^{k-1} + \cdots + c_{k-1}x + c_k$ は

$$x^k + c_1 x^{k-1} + \cdots + c_{k-1}x + c_k = (x - \alpha_1)^{m_1} \cdots (x - \alpha_r)^{m_r}$$

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_r \text{ は相異なる } \mathbb{K} \text{ の元、} m_1, \cdots, m_r \text{ は自然数})$$

のように $\mathbb{K}[x]$ において一次式の積に分解すると仮定する。このとき、漸化式

$$a_{n+k} + c_1 a_{n+k-1} + \cdots + c_k a_n = 0 \ \ (n = 1, 2, \cdots)$$

を満たす、$\mathbb{K}$ の元からなる任意の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は次の数列の一次結合として一意的に表わされる：

$$\{\alpha_1^n\}_{n=1}^{\infty},\ \left\{\binom{n}{1}\alpha_1^{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty},\ \left\{\binom{n}{2}\alpha_1^{n-2}\right\}_{n=1}^{\infty},\ \cdots,\ \left\{\binom{n}{m_1-1}\alpha_1^{n-m_1+1}\right\}_{n=1}^{\infty},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\{\alpha_r^n\}_{n=1}^{\infty},\ \left\{\binom{n}{1}\alpha_r^{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty},\ \left\{\binom{n}{2}\alpha_r^{n-2}\right\}_{n=1}^{\infty},\ \cdots,\ \left\{\binom{n}{m_r-1}\alpha_r^{n-m_r+1}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

No.15 2026 年 1 月 19 日

線形代数 4 事前練習用演習問題

pre15-1. 漸化式 $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0\ \ (n=1,2,\cdots)$ を満たす実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ であって、$a_1=2,\ a_2=-1$ を満たすものの一般項を求めよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre15-1.

[定理 15 - 4 - 5] を使えば、[例 15 - 4 - 4] のように、連立一次方程式を立てて計算するだけで求めることができる。しかし、ここでは直接的な方法による略解を載せる。

与えられた漸化式を満たす実数列の全体のなす実ベクトル空間を V とおき、線形変換 $T: V\longrightarrow V$ を $T(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})=\{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ により定義する。$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ を最初の 3 項目が次のように与えられる V に属する数列とする：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= 1,0,-4,\cdots\cdots,\\
\boldsymbol{e}_2 &= 0,1,\ \ 4,\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

“$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$” は V の基底をなし、この基底に関する T の行列表示は

$$
A=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -4 & 4\end{pmatrix}
$$

である。$\varDelta_T(x)=\varDelta_A(x)=x^2-4x+4=(x-2)^2$ であるから、T の固有値は 2 のみである。したがって、$T-2\mathrm{id}_V$ は冪零変換である。

$$
A-2E_2=\begin{pmatrix} -2 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}\qquad (A-2E_2)^2=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}
$$

であるから、$T-2\mathrm{id}_V$ の冪零指数は 2 である。よって、$T-2\mathrm{id}_V$ が定める Young 図形は $\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}$ の形になる。

この Young 図形に適合する V の基底を 1 組与えよう。まず、$(\mathrm{Ker}\,T_{A-2E_2})\oplus\langle\mathbf{v}\rangle=\tilde{W}(2)$ を満たす $\mathbf{v}\in\tilde{W}(2)$ を 1 つ選ぶ。

$$
\mathrm{Ker}\,T_{A-2E_2}=\left\{\ \begin{pmatrix} x\\ 2x\end{pmatrix}\ \middle|\ x\in\mathbb{R}\ \right\}
$$

より $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ を選ぶと、先の Young 図形に適合する V の基底 $\mathscr{B}=$ “$(A-2E_2)(\mathbf{v}),\mathbf{v}$”が得られる。この V の基底に関する $T-2\mathrm{id}_V$ の行列表示は $J(0,2)$ であるから、同じ基底に関する T の行列表示は $J(2,2)$ となる。したがって、V の基底 “$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$” に関する座標系のもとで $(A-2E_2)(\mathbf{v}),\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$ に対応する V の数列をそれぞれ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
&T(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})=2\{x_n\}_{n=1}^{\infty} &&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①\\
&T(\{y_n\}_{n=1}^{\infty})=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}+2\{y_n\}_{n=1}^{\infty} &&\cdots\cdots ②
\end{aligned}
$$

が成立する。T は初項を削る写像であるから、①より $x_{n+1}=2x_n\ (n=1,2,\cdots\cdots)$ を得る。これより、$x_n=2^{n-1}x_1\ (n=1,2,\cdots\cdots)$ がわかる。$(A-2E_2)(\mathbf{v})=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ であるから、$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2=$ “$1,2,\cdots\cdots$” である。これより

$$
x_n=2^{n-1}\qquad (n=1,2,\cdots\cdots)
$$

がわかる。

同様に、②より $y_{n+1} = x_n + 2y_n$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ を得る。これに $x_n = 2^{n-1}$ を代入すると、

$$\frac{y_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{4} + \frac{y_n}{2^n}$$

となるから、これを解いて、

$$y_n = (n-1)2^{n-2} \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

が得られる。

以上より、漸化式 $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0 \ \ (n = 1, 2, \cdots)$ を満たす実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の一般項は $s, t \in \mathbb{R}$ を定数として

$$(*) \qquad a_n = s \cdot 2^{n-1} + t \cdot (n-1)2^{n-2} \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

により与えられることがわかる。

最後に、$a_1 = 2,\ a_2 = -1$ を満たすものを求めよう。$(*)$ は $n = 1, 2$ のとき

$$\begin{cases} s = 2, \\ 2s + t = -1 \end{cases}$$

であるから、$s = 2,\ t = -5$ とわかる。よって、漸化式 $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0 \ \ (n = 1, 2, \cdots)$ および初期条件 $a_1 = 2,\ a_2 = -1$ を満たす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の一般項は

$$a_n = 2^n - 5 \cdot (n-1)2^{n-2} = (9 - 5n)2^{n-2}$$

により与えられる。

線形代数４・第 15 回 (2026 年 1 月 19 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数４・第 15 回学習内容チェックシート 2026 年 1 月 19 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. (1) n 次正方行列 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ の Jordan 標準形とは何か。説明せよ。

(2) $A = \begin{pmatrix} A_1 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & A_2 \end{pmatrix}$ (但し、O は零行列), $\mathit{\Delta}_{A_1}(x) = (x-1)^2(x-2)$, $\mathit{\Delta}_{A_2}(x) = (x-1)(x-2)^2$ により与えられる実正方行列 A の Jordan 標準形として考えられ得るものをすべて列挙せよ。但し、直和の順番の入れ替えで移りあうものは同じ Jordan 標準形とみなす。

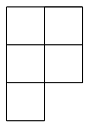
Q2. n 次正方行列 A の固有多項式は

$$\mathit{\Delta}_A(x) = (x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2} \qquad (\alpha_1, \alpha_2 \text{ は異なる実数で、} m_1, m_2 \geq 1)$$

のように因数分解されるものとし、$\mathbb{R}$-線形変換 $T = T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を考える。T の固有値 α_i $(i = 1, 2)$ に属する広義固有空間を $\tilde{W}(\alpha_i)$ とおく。

(1) $\dim \tilde{W}(\alpha_i) =$ ＿＿＿.

(2) 広義固有空間 $\tilde{W}(\alpha_i)$ は、どのような連立一次方程式を解くことによって求められるか。

(3) 冪零変換 $(T_{A-\alpha_i E_n})|_{\tilde{W}(\alpha_i)} : \tilde{W}(\alpha_i) \longrightarrow \tilde{W}(\alpha_i)$ が定める Young 図形が  であったとする。このとき、

(i) $T|_{\tilde{W}(\alpha_i)}$ の Jordan 標準形はどうなるか。 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(ii) $T|_{\tilde{W}(\alpha_i)}$ の行列表示が Jordan 標準形であるような $\tilde{W}(\alpha_i)$ の基底は、ある $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^5$ を用いて

$$\text{“}(A-\alpha_i E_n)^2\mathbf{v}, (A-\alpha_i E_n)\mathbf{v}, \mathbf{v}, (A-\alpha_i E_n)\mathbf{u}, \mathbf{u}\text{”}$$

によって与えられる。$\mathbf{v}, \mathbf{u}$ はそれぞれどのようなベクトルを探すことにより得られるか。

[$\mathbf{v}$ を探すための条件] ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

[$\mathbf{u}$ を探すための条件] ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q3. 第 15 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。