§15. 条件付き極値問題

２変数関数の極値問題を解くための方法として、第９節においてヘッシアン判定法を学んでいる。ここでは、例えば、$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ が $x^2+y^2=1$ といった制約条件を満たすときの関数 $f(x,y)$ の極値問題について議論する。このような問題を解決する方法としてよく知られている、ラグランジュの未定乗数法について学ぶ。

● 15 - 1 : 条件付き極値問題：例

(x,y)-平面における点 (a,b) と単位円周 $C=\{\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\ \}$ との最短距離を求める問題を考えよう。この問題は、$x^2+y^2=1$ という制約条件の下で、2 変数関数 $f(x,y)=(x-a)^2+(y-b)^2$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ の最小値を求める問題として捉えることができる。この問題の答えは図形を描いてみれば容易に想像がつくが、ここでは以下のようにして、1 変数関数の極小値を求める問題に帰着させて、解決しよう。

関数 $f(x,y)$ の定義域を C に制限したとき、$f(x,y)$ は C 上の点 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ において最小値をとると仮定する。

$y_0>0$ の場合、P の近くの C 上の点は $(x,\sqrt{1-x^2})$ と表わされる。したがって、$g(x)=f(x,\sqrt{1-x^2})$ $(-1<x<1)$ とおくと、任意の $x\in(-1,1)$ に対して $g(x)\geq g(x_0)$ となる。g は C^1**-級** (すなわち、微分可能で、導関数が連続) であるから、平均値の定理により、x_0 は $g'(x_0)=0$ を満たす。合成関数の偏微分規則により、

$$g'(x_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{x_0}{y_0}$$

であるから、次の等式が成り立つ：

(15 - 1 a)
$$y_0\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)-x_0\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0.$$

$y_0<0$ の場合も同様にして (15 - 1 a) が成り立つことがわかる。

$y_0=0$ の場合、$x_0=\pm1$ である。$x_0=1$ ならば、P の近くの C 上の点は $(\sqrt{1-y^2},y)$ と表わされ、$x_0=-1$ ならば、$(-\sqrt{1-y^2},y)$ と表わされる。したがって、$h(y)=f(x_0\sqrt{1-y^2},y)$ $(-1<y<1)$ とおくと、任意の $x\in(-1,1)$ に対して $h(y)\geq h(y_0)$ となる。h は C^1-級であるから、平均値の定理により、y_0 は $h'(y_0)=0$ を満たすことがわかる。合成関数の偏微分規則を使って $h'(y_0)$ を計算すると、やはり、(15 - 1 a) が成り立つことがわかる。

以上の考察から、関数 $f(x,y)$ の定義域を C に制限したとき、点 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ において最小値をとるならば、(15 - 1 a) が成りたなければならないことがわかる。(x_0,y_0) は $x_0^2+y_0^2=1$ を満たすので、同時には 0 でないから、

$$\begin{aligned}
\text{(15 - 1 a) が成立} \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{ベクトル}\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\ \text{と}\ (y_0,-x_0)\ \text{とは直交する}\\
&\Longleftrightarrow \quad \text{ベクトル}\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\ \text{と}\ (x_0,y_0)\ \text{とは平行である}\\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)=\lambda(x_0,y_0)\ \text{となる実数}\ \lambda\ \text{が存在する}
\end{aligned}$$

と言い換えられる。以上の考察から、関数 $f(x,y)$ の定義域を C に制限したときの最小値を与える点は、x,y,λ に関する連立方程式

(15 - 1 b)
$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 2(x-a)=\lambda x & \cdots\cdots\cdots ② \\ 2(y-b)=\lambda y & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

の解の中にある。$(a,b)\neq(0,0)$ のとき、連立一次方程式 (15 - 1 b) の解は $(x,y,\lambda)=\left(\mp\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\mp\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},2\pm2\sqrt{a^2+b^2}\right)$ (複号同順) である。このうち、$f(x,y)$ が最小となるのは、$(x,y)=\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ のときである。$(a,b)=(0,0)$ のとき、連立一次方程式 (15 - 1 b) の解は $(x,y,\lambda)=(x,y,2)$ ((x,y) は C 上の任意の点) である。このとき、C 上で $f(x,y)=1$ となり、C のすべての点で $f(x,y)$ は最小になる。

● 15 - 2 : ラグランジュの未定乗数法

$f(x,y)$, $g(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ の領域 D 上で定義された C^1-級関数とする。関数 $f(x,y)$ が制約条件 $g(x,y)=0$ の下で点 $(a,b)\in D$ において**広義極小**であるとは、十分小さく $\varepsilon>0$ をとると、(a,b) を中心とする ε-近傍 $U_\varepsilon(a,b)$ の中の $g(x,y)=0$ を満たす任意の点 (x,y) に対して $f(x,y)\geq f(a,b)$ となるときをいう。このとき、$f(a,b)$ を制約条件 $g(x,y)=0$ の下での**広義極小値**と呼ぶ。同様に、$U_\varepsilon(a,b)$ の中の $g(x,y)=0$ を満たす任意の点 (x,y) に対して $f(x,y)\leq f(a,b)$ となるとき、$f(x,y)$ は制約条件 $g(x,y)=0$ の下で点 $(a,b)\in D$ において**広義極大**であるといい、$f(a,b)$ を制約条件 $g(x,y)=0$ の下での**広義極大値**と呼ぶ。広義極小値と広義極大値を総称して**広義の極値**と呼ぶ。

制約条件の下での関数の (広義の) 極値や最大・最小値を求める問題は、第 15 - 1 節で観察したように、(15 - 1 b) のような連立一次方程式を解く問題に帰着させることができる。その方法は次の定理で与えられ、ラグランジュの未定乗数法と呼ばれている。

定理 15 - 2 - 1 (ラグランジュの未定乗数法)

$f(x,y)$, $g(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ の領域 D 上で定義された C^1-級関数とする。制約条件 $g(x,y)=0$ の下で関数 $f(x,y)$ が点 $(a,b)\in D$ において広義の極値をとるとする。このとき、次の①,②のうちのいずれかが成り立つ。

① $\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b)=\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b)=0.$

② $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\lambda\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b)$ を満たす実数 λ が存在する。

②の λ を**ラグランジュの未定乗数**と呼ぶ。

定理の証明は最後に廻し、定理の使い方を見よう。

例 15 - 2 - 2 制約条件 $x^2+y^2=1$ の下で、関数 $f(x,y)=x^2+xy-y^2$ ($(x,y)\in\mathbb{R}^2$) の最大値と最小値を求めよう。

$g(x,y)=x^2+y^2-1$ とおくと、$\dfrac{\partial g}{\partial x}=2x,\ \dfrac{\partial g}{\partial y}=2y$ である。

① $g(x,y)=\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}=0$ を x,y について解く。

しかしながら、この解は存在しない。

② $g(x,y)=0,\ \frac{\partial f}{\partial x}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\lambda\frac{\partial g}{\partial y}$ を x,y,λ について解く。すなわち、

$$(15\text{-}2\text{ a})\qquad \begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 2x+y=2\lambda x & \cdots\cdots\cdots ② \\ x-2y=2\lambda y & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

を解く。この解は次で与えられることがわかる。

$$(x,y,\lambda) = \left(\pm\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}, \pm\frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{(複号同順)}$$

(15 - 2 b)

$$\left(\pm\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}}, \pm\frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{(複号同順)}$$

これらの点の中に、制約条件 $x^2+y^2=1$ の下で関数 $f(x,y)$ の最大値と最小値を与える点が存在する。実際、これらの点での $f(x,y)$ の値を計算し、比較することにより、最大値は $\frac{\sqrt{5}}{2}$ であり、最小値は $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ であることがわかる。 □

● 15 - 3 : 陰関数とは

x,y に関する 2 次方程式 $x^2+y^2-1=0$ を考える。この方程式の実数解を一遍に 1 つの関数で表示することはできないが、ある解の近くでは、y を x の関数として表わすことができたり、x を y の関数として表わすことができる。例えば、$(\pm1,0)$ 以外の解 (x_0,y_0) を 1 つ指定すれば、$y_0>0$ ならば、(x_0,y_0) の近くの 2 次方程式 $x^2+y^2-1=0$ の解は $(x,\sqrt{1-x^2})$ により与えられ、符号が特定され、したがって、y は x の関数として表されることがわかる。これらの関数は 2 次方程式 $x^2+y^2-1=0$ の中に (必然的に)“潜む”関数と考えられる。

定義 15 - 3 - 1

$g(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ の領域 D 上で定義された C^1-級関数とし、$(a,b)\in D$ は $g(a,b)=0$ を満たしているとする。開区間 I 上で定義された C^1-級関数 $\phi(t)$ が次の (i), (ii) のいずれかを満たすとき、方程式 $g(x,y)=0$ の (a,b) のまわりの**陰関数**と呼ばれる。

(i) $\boxed{1}$ $a\in I,\ \phi(a)=b$ であり、

$\boxed{2}$ 点 (a,b) を含むある開集合 U 内の点 (x,y) に対して、

$$g(x,y)=0 \iff x\in I,\ y=\phi(x).$$

(ii) $\boxed{1}$ $b\in I,\ \phi(b)=a$ であり、

$\boxed{2}$ 点 (a,b) を含むある開集合 U 内の点 (x,y) に対して、

$$g(x,y)=0 \iff y\in I,\ x=\phi(y).$$

(i) における条件$\boxed{1}$, $\boxed{2}$は、(a,b) の近くで方程式 $g(x,y)=0$ を満たす y が x の C^1-級関数として表わされることを意味する。(ii) における条件件$\boxed{1}$, $\boxed{2}$についても同様に解釈される。

例 15 - 3 - 2 C^1-級関数 $g(x,y)=y^2-x^2(x+1)$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ を考える。$g(3,-6)=0$ であり、$\phi(x)=-x\sqrt{x+1}$ $(x>-1)$ とおくと、関数 $\phi(x)$ は C^1-級であり、$\phi(3)=-6$ を満たす。$(3,-6)$ を含む開集合 $U=\{\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>-1,\ y<1\ \}$ において、「$g(x,y)=0 \iff y=\phi(x)$」となるから、開区間 $I=(-1,\infty)$ 上で定義された関数 $\phi(x)$ は方程式 $g(x,y)=0$ の $(3,-6)$ のまわりでの陰関数である。 □

● 15 - 4 : 陰関数定理とその応用

x,y についての方程式 $ax+by+c=0$ は、$b\neq0$ ならば、$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ のように、y について解くことができる。関数 $g(x,y)$ を $g(x,y)=ax+by+c$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ によって定めると、$b=\frac{\partial g}{\partial y}$ であるから、$b\neq0$ という条件を $\frac{\partial g}{\partial y}\neq0$ という条件に置き換えることができる。この事実の一般化が次の陰関数定理である。

定理 15 - 4 - 1 (陰関数定理)

$g(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ の領域 D 上で定義された C^1-級関数とし、点 $(a,b) \in D$ は $g(a,b)=0$ を満たしているとする。

(1) $\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \neq 0$ ならば、方程式 $g(x,y)=0$ の (a,b) のまわりの陰関数 $\phi(x)$ $(x \in I)$ であって、[定義 15 - 3 - 1](i) のタイプのものが存在する。

(2) $\frac{\partial g}{\partial x}(a,b) \neq 0$ ならば、方程式 $g(x,y)=0$ の (a,b) のまわりの陰関数 $\phi(y)$ $(y \in I)$ であって、[定義 15 - 3 - 1](ii) のタイプのものが存在する。

陰関数定理の証明は本格的な微分積分学の教科書を参照。ここでは、有用な応用例を 1 つ述べよう。陰関数定理を利用すれば、陰関数を具体的に求めなくても、その微分を計算することができる。

例 15 - 4 - 2 C^1-級関数 $g(x,y)=e^x+xy^2+xe^y-y$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ を考える。$\boldsymbol{p}_0=(0,1)$ は $g(\boldsymbol{p}_0)=0$, $\frac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{p}_0)=-1\neq 0$ を満たすから、陰関数定理により、$\boldsymbol{p}_0$ の近くで方程式 $e^x+xy^2+xe^y-y=0$ の解 (x,y) は、0 を含む $\mathbb{R}$ のある開区間 I 上で定義された C^1-級関数 $\phi(x)$ を用いて、$(x,y)=(x,\phi(x))$ と表わされる。任意の $x\in I$ に対して $e^x+x\phi(x)^2+xe^{\phi(x)}-\phi(x)=0$ が成り立つから、この両辺を x で微分して、

$$e^x+\big(\phi(x)^2+x\cdot 2\phi(x)\cdot\phi'(x)\big)+\big(e^{\phi(x)}+xe^{\phi(x)}\cdot\phi'(x)\big)-\phi'(x)=0$$

を得る。$\phi(0)=1$ であるから、ϕ の 0 における微分係数が $\phi'(0)=2+e$ のように求まる。 □

● 15 - 5 : [定理 15 - 2 - 1] の証明

①でないときには②が成り立つことを示す。①でないとき、$\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)\neq 0$ か、$\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)\neq 0$ の少なくとも一方が成り立つ。$\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)\neq 0$ であったとすると、陰関数定理により、方程式 $g(x,y)=0$ の (a,b) のまわりの陰関数 $\phi(x)$ $(x\in I)$ であって、$a\in I$, $\phi(a)=b$ および、任意の $x\in I$ に対して $(x,\phi(x))\in D$, $g(x,\phi(x))=0$ を満たすものが存在する。$g(x,\phi(x))=0$ の両辺を微分して

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,\phi(x))\cdot 1+\frac{\partial g}{\partial y}(x,\phi(x))\cdot\phi'(x)=0 \tag{15 - 5 a}$$

を得る。一方、関数 $f(x,y)$ は制約条件 $g(x,y)=0$ の下で (a,b) において広義の極値をとるから、1 変数関数 $h(x)=f(x,\phi(x))$ $(x\in I)$ は $x=a$ において広義の極値をとる。したがって、平均値の定理により、$h'(a)=0$ を満たす。合成関数の連鎖律から、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot 1+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot\phi'(a)=h'(a)=0 \tag{15 - 5 b}$$

を得る。この 2 式から

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)=0$$

が得られる。あとは第 15 - 1 節の方法と同様にして、

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Big)=\lambda\Big(\frac{\partial g}{\partial x}(a,b),\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)\Big)$$

を満たす $\lambda\in\mathbb{R}$ の存在がわかる。$\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b)\neq 0$ の場合にも同様の議論で②が成立することが示される。 □

2026 年 1 月 14 日

数学を学ぶ（微分積分２）第 15 回・学習内容チェックシート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. $f(x,y),\ g(x,y)$ を領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された C^1-級関数とします。次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
関数 $f(x,y)$ が制約条件 $g(x,y) = 0$ の下で点 $(a,b) \in D$ において広義極小であるとは？	p.	

Q2. $f(x,y),\ g(x,y)$ を領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された C^1-級関数とし、制約条件 $g(x,y) = 0$ の下で関数 $f(x,y)$ が点 $(a,b) \in D$ において広義の極値をとるとします。$\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b) = 0$ でないとき、

- ラグランジュの未定乗数 $\lambda \in \mathbb{R}$ が満たす等式を下の枠内に書きなさい。

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

- ラグランジュの未定乗数法を用いて、制約条件 $g(x,y) = 0$ の下での関数 $f(x,y)$ の最大値を求める手順を述べなさい。

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Q3. $g(x,y)$ を領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された C^1-級関数とし、$(a,b) \in D$ は $g(a,b) = 0$ を満たしているとします。次の $\boxed{\quad}$ に適当な言葉や数式を入れなさい。

- ある開区間 I 上で定義された C^1-級関数 $\phi(x)$ が次の 2 条件を満たすとき、方程式 $g(x,y) = 0$ の (a,b) のまわりの $\boxed{\qquad}$ と呼ばれる。

  $\boxed{1}$ $a \in I$ かつ $\boxed{\qquad}$

  $\boxed{2}$ 点 (a,b) を含むある開集合 U 内の点 (x,y) に対して、

$$g(x,y) = 0 \iff \boxed{\qquad\qquad}.$$

- $\boxed{\qquad\qquad}$ ならば、$\boxed{\qquad\qquad}$ により、方程式 $g(x,y) = 0$ の (a,b) のまわりの陰関数 $\phi(x)$ $(x \in I)$ であって、Q3 における$\boxed{1}$, $\boxed{2}$を満たすものが存在する。このとき、関数 $\phi(x)$ の a における微分係数 $\phi'(a)$ は、$\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b),\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b)$ を用いて

$$\phi'(a) = \boxed{\qquad\qquad}$$

のように表わされる。

Q4. 第 15 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。