No.2 2024年10月3日

線形代数2演習問題

2-1. (ベクトルのなす角および直交条件).

$\mathbb{R}^3$ の 2 つのベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ。

(1) $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ のなす角を求めよ。

(2) $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ の両方に直交するような $\mathbb{R}^3$ のベクトルをすべて求めよ。

2-2. (正規直交基底)

$\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_2 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_3 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ。

(1) "$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$" は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底であることを示せ。

(2) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を "$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$" の一次結合で表わせ。

線形代数２通信 [No.2]

2024年10月3日発行

■ 学習内容チェックシートの修正方法

修正すべき解答に「※」を記しています。次のことを守り、その答えを書き直してください。

- ○ **間違えている箇所を消しゴムで綺麗に消す。**
- ○ **黒の鉛筆またはシャープペンで正解を書き込む。**

枠外に書く、赤ペンで修正するなど、ルールに法らない修正は、未修正と同じ評価になります。

■ 第１回学習内容チェックシートについて

- ○ Q2 の最初の 2 つの枠が空欄になっているシートが 8 枚もありました。文章を読まず、単に「穴を埋める」ことだけを目標にすると、見落としてしまいます。空欄があるシートは未提出扱いとなり、再提出できません。文章をしっかり読んで、一つ一つ考えながら解答してください。
- ○ Q3 は、[定理 1-4-3] にある同値な条件の中から、行列 $A = (\mathbf{v}_1\ \cdots\ \mathbf{v}_n)$ に直接関連するものを選ぶようにします。「正則」という条件は調べにくいので、残りの 2 つのうちのどちらかを選びましょう。一般に、階数を求める方が行列式を計算するよりも易しいので、階数を使った判定条件を挙げるとよいでしょう。その際、単に $\operatorname{rank} A = n$ になるかどうかを確かめる、と答えるだけでなく、$\operatorname{rank} A = n$ なら "$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$" は基底であり、そうでないなら基底でない、というところまで答えましょう。

■ 演習 1-1 について

(1) $A := (\mathbf{v}\ \mathbf{u})$ の行列式 $|A|$ を計算すると、$|A| = 2 \cdot 4 - (-3) \cdot 3 = 17 \neq 0$ になることから [定理 1-4-3] より "$\mathbf{v}\ \mathbf{u}$" は $\mathbb{R}^2$ の基底をなすことがわかります。

(2) $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおき、2 次正方行列 $B = (\mathbf{v}\ \mathbf{w})$ の行列式 $|B|$ を計算します。$|B| = 2y - 3x$ となるので、$|B| = 0$ となる条件を求めて、$x = 2t,\ y = 3t\ (t \in \mathbb{R})$ が得られます。これより、"$\mathbf{v}\ \mathbf{w}$" が $\mathbb{R}^2$ の基底にならないような $\mathbf{w}$ は $\mathbf{w} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = t\mathbf{v}\ (t \in \mathbb{R})$ によって与えられることがわかります。

■ 演習 1-2 について

(1) $A = (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3)$ とおき、これに行基本変形 (①$\times(-2)+$②, ①$\times(-4)+$③ を行なったのち、②$\times(-5)+$③) を行い階段行列にすることで $\operatorname{rank} A = 3$ がわかるので、"$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$" は $\mathbb{R}^3$ の基底であると結論づけることができます。

(2) 拡大係数行列 $(A|\mathbf{x})$ に (1) と同じ行基本変形を施して階段行列 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 3 & b-2a \\ 0 & 0 & 6 & c-5b+6a \end{array}\right)$ が得られます。これを連立一次方程式に戻し、後退代入で解くことにより、$\mathbf{x}$ は $\mathbf{x} = \dfrac{15a-8b+c}{3}\mathbf{v}_1 + \dfrac{-10a+7b-c}{2}\mathbf{v}_2 + \dfrac{6a-5b+c}{6}\mathbf{v}_3$ のように表わされることがわかります。

■ 次回予告

次回は、内積と行列との関係を調べます。内積は行列に対して転置を取る操作と深く関わっています。それらの関係のほか、直交行列、対称行列の固有値と固有ベクトルなどを学びます。

線形代数２・第２回 (2024 年 10 月 3 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。