

線形代数 2 演習問題

2-1. (ベクトルのなす角および直交条件).

$\mathbb{R}^3$ の 2 つのベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ。

- (1) $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ のなす角を求めよ。
- (2) $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の両方に直交するような $\mathbb{R}^3$ のベクトルをすべて求めよ。

2-2. (正規直交基底)

$\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ。

- (1) “ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ ” は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底であることを確かめよ。
- (2) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を “ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ ” の一次結合で表わせ。

■ 学習内容チェックシートの修正方法

修正すべき解答に「※」を記しています。次のことを守り、その答えを書き直してください。

- 間違えている箇所を消しゴムで綺麗に消す。
- 黒の鉛筆またはシャープペンで正解を書き込む。

枠外に書く、赤ペンで修正するなど、ルールに法らない修正は、未修正と同じ評価になります。

■ 第 1 回学習内容チェックシートについて

- Q1 の表の上から 2 番目は一次結合の定義を答える問題でした。設問に書かれているように、ここでは、 $\mathbf{x}$ を “ $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ ” の一次結合で表さなければなりません、アブストラクトの該当する式をそのまま書いたために、波線のベクトルが $\mathbf{v}_d$ になっているものが非常に多かったです。問題文をよく読んだ上で解答しましょう。
- Q3 は、[定理 1-4-3] にある同値な条件の中から、行列 $A = (\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n)$ に直接関連するものを選ぶようにします。「正則」という条件は調べにくいので、残りの 2 つのうちどちらかを選びましょう。一般に、階数を求める方が行列式を計算するよりも易しいので、階数を使った判定条件を挙げるとよいでしょう。その際、単に $\text{rank } A = n$ になるかどうかを確かめる、と答えるだけでなく、 $\text{rank } A = n$ なら “ $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ ” は基底であり、そうでないなら基底でない、というところまで答えるのがベストです。

■ 演習 1-1 について

(1) $A = (\mathbf{v} \ \mathbf{u})$ において、階数または行列式を計算します。ここでは行列式 $|A|$ を計算すると $|A| = 132 \neq 0$ になることから、[定理 1-4-3] より “ $\mathbf{v} \ \mathbf{u}$ ” は $\mathbb{R}^2$ の基底をなすことがわかります。

(2) $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおき、行列 $B = (\mathbf{v} \ \mathbf{w})$ の行列式を計算します。 $|B| = 11(y - 11x)$ となるので、 $|B| = 0$ を解いて、 $x = t, y = 11t$ ($t \in \mathbb{R}$) が得られます。これより、“ $\mathbf{v} \ \mathbf{w}$ ” が $\mathbb{R}^2$ の基底にならないような $\mathbf{w}$ は $\mathbf{w} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} = t\mathbf{v}$ ($t \in \mathbb{R}$) によって与えられることがわかります。

■ 演習 1-2 について

(1) $A = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3)$ とおき、これに行基本変形 (① $\times 2 +$ ②, ① $\times (-4) +$ ③) を行なったのち、② $\times 5 +$ ③) を行い階段行列にすることで $\text{rank } A = 3$ がわかるので、“ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ” は $\mathbb{R}^3$ の基底であると結論づけることができます。

(2) 拡大係数行列 $(A|\mathbf{x})$ に (1) と同じ行基本変形を施して階段行列 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -3 & b+2a \\ 0 & 0 & 6 & c+5b+6a \end{array} \right)$

が得られます。これを連立一次方程式に戻し、後退代入で解くことにより、 $\mathbf{x}$ は

$\frac{15a+8b+c}{3}\mathbf{v}_1 - \frac{10a+7b+c}{2}\mathbf{v}_2 + \frac{6a+5b+c}{6}\mathbf{v}_3$ のように表わされることがわかります。

■ 次回予告

今回は、内積と行列との関係を調べます。内積は行列に対して転置を取る操作と深く関わっています。それらの関係のほか、直交行列、対称行列の固有値と固有ベクトルなどを学びます。

線形代数2・第2回(2026年10月1日)演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください(答えのみは評価しません)。