線形代数 3 演習問題

2-1. $\mathbb{C}^2$ に通常のエルミート内積を入れて考える。ベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ は、ベクトル

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 3-2i \end{pmatrix} \quad (i \text{ は虚数単位})$$

に直交し、かつ、ノルムが 1 であるとする。

(1) $|\beta|$ を求めよ。

(2) 与えられた条件を満たす $\mathbf{v}$ をすべて求めよ。

2-2. (1) 高々 2 次の複素係数多項式 $h(x)$ を $h(x) = \gamma_0 x^2 + \gamma_1 x + \gamma_2$ $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C})$ のように表わし、これを代入操作により、閉区間 $[0,1]$ 上で定義された複素数値連続関数

$$h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad h(t) = \gamma_0 t^2 + \gamma_1 t + \gamma_2 \in \mathbb{C} \quad (t \in [0,1])$$

とみなす。積分 $\displaystyle\int_0^1 h(x)dx$ の値を $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ を用いて表わせ。

(2) 高々 1 次の複素係数多項式の全体のなす複素ベクトル空間を $\mathbb{C}[x]_1$ とおき、各 $f(x) \in \mathbb{C}[x]_1$ を、代入操作により、閉区間 $[0,1]$ 上で定義された複素数値連続関数とみなす。すると、$\mathbb{C}[x]_1$ は複素ベクトル空間 $C([0,1],\mathbb{C})$ の部分空間をなし、$C([0,1],\mathbb{C})$ のエルミート内積

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx \quad \bigl(f, g \in C([0,1],\mathbb{C})\bigr)$$

を $\mathbb{C}[x]_1$ 上に制限することにより、$\mathbb{C}[x]_1$ 上にエルミート内積が定まる。

$f(x) = \alpha_0 x + \alpha_1$, $g(x) = \beta_0 x + \beta_1 \in \mathbb{C}[x]_1$ $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{C})$ に対して、$\langle f, g \rangle$ の値を $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ を用いて表わせ。

線形代数３通信　[No.2]　2025 年 4 月 14 日発行

■ 学習内容チェックシートの修正方法

修正すべき解答に「※」を記しています。次のことを守って答えを書き換えてください。

- **間違えている箇所を消しゴムで綺麗に消し、**
- **黒の鉛筆またはシャープペンで正解を書き込む。**

枠外に書く、赤ペンで修正するなど、ルールに法らない修正は、未修正と同じ評価になります。

■ 第１回学習内容チェックシートについて

- Q2(1) は、関数の和とスカラー倍の定義を書く問題でした。関数は定義域、終域と元の対応規則の 3 つによって定まるので、それらを明示して書くようにします。和に関しては、「$f+g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)\ \ (x\in[a,b])$」のように書くとよいでしょう。
- Q2(2) はベクトル空間 $C[a,b]$ における零ベクトルとなる関数を書く問題でした。上で説明したように、定義域、終域と元の対応規則の 3 つを明示する形で書きます。具体的には、「$f_0(x)=0\ (x\in[a,b])$ により定まる関数 $f_0:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$」のように書くとよいでしょう。
- Q3(4) では $\cos\theta=\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}$ とだけ書かれた解答がありました。この等式を満たす何をなす角と呼ぶのでしょうか。言葉を補ってください。また、θ の範囲も明記してください。

■ 演習 1-1 について

(1) 出来ている人が予想以上に多かったです。任意の $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ に対して、$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_{E_n}=\mathbf{y}^{\mathrm{T}}E_n^{\mathrm{T}}E_n\mathbf{x}=\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ となりますが、ここで $\mathbf{x},\mathbf{y}$ をそれぞれ成分で表わすことにより、$\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ が (1-1a) で与えられている $\mathbb{R}^n$ の通常の内積に一致していることがわかります。

(2) 等式 $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_A=\langle A\mathbf{x},A\mathbf{y}\rangle_{E_n}$ をどう使えばよいのかがわからなかった人が多く、出来はよくありませんでした。例えば、(IP2) を満たすことは、次の式変形からわかります。

$$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_A=\langle A\mathbf{x},A\mathbf{y}\rangle_{E_n}\overset{(*)}{=}\langle A\mathbf{y},A\mathbf{x}\rangle_{E_n}=\langle\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle_A$$

上式の $(*)$ の部分で $\langle\ ,\ \rangle_{E_n}$ が内積であるため (IP2) を満たすことを使っています。

(IP3) の後半の主張が満たされることは、次のようにわかります。$\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle_A=0$ とすると、これは $\langle A\mathbf{x},A\mathbf{x}\rangle_{E_n}=0$ と書き換えられます。$\langle\ ,\ \rangle_{E_n}$ は (IP3) を満たすので、上の等式から $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ が導かれ、A が正則であることから $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ が従います。逆に、$\mathbf{x}=\mathbf{0}$ であれば直ちに $\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle_A=0$ がわかるので、$\langle\ ,\ \rangle_A$ は (IP3) の後半の主張も満たすというわけです。

■ 演習 1-2 について

$\sin mx\cos nx=\dfrac{1}{2}\big(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\big)$ を用いて、[例 1-4-2] に習って示すことができます。注意すべきは、積分計算の際に、$m+n, m-n$ のそれぞれについて 0 かそうでないかの (4 通りの) 場合に分ける必要があるということです。それが煩わしい人は、整数 k に対して関数 $\sin kx\ (x\in[-\pi,\pi])$ が奇関数であることに注意し、定積分の性質を使うとよいでしょう。

■ 次回予告

次回は、正規直交基底の概念を導入し、部分空間への正射影について説明します。正射影は、任意の基底を正規直交基底に作り直すグラム-シュミットの直交化法の基礎となります。

線形代数３・第２回 (2025 年 4 月 14 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。