No.2 2026年4月16日

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎１）演習問題

2-1. 関数 $f(x) = 5\sqrt{x^2+4} \quad (x \in \mathbb{R})$ について以下の問いに答えよ。

(1) $f\left(\dfrac{\sqrt{13}}{3}\right)$ を求めよ。

(2) 関数 g_1, g_2 を

$$g_1(x) = x, \qquad g_2(x) = 4 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義し、関数 h を

$$h(x) = \sqrt{x} \qquad (x \geq 0)$$

によって定義する。与えられた関数 f は g_1, g_2, h からどのように和、積、スカラー倍、合成を施すことにより得られるか。

2-2. (1) $\cos\left(\dfrac{27}{8}\pi\right)$ の値を求めよ。

(2) 三角関数の加法公式と、sin が奇関数であり cos が偶関数であることを用いて、$\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ に対して次の等式が成り立つことを示せ。

$$\cos\theta\cos\varphi = \frac{1}{2}\big(\cos(\theta+\varphi) + \cos(\theta-\varphi)\big).$$

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎１）通信 [No.2]

2026 年 4 月 16 日発行

■ 演習 1-1 について

商の形で与えられた数列の極限を求める問題でした。(1) も (2) も与えられたままでは、$n \to \infty$ のとき分母・分子はともに $+\infty$ に発散してしまうので、商の極限公式を用いることはできません。そこで、[例 1-4-1] で行ったような一工夫をする必要があります。

(1) では分母・分子を n^3 で割れば収束するようにできるので、そのような変形を行ってから商の極限公式を適用します。$(2n-3)^3$ を展開してから極限を求めた答案がほとんどでしたが、展開せずに計算した方が計算間違いのリスクを減らすことができます。極限は 2 になります。

(2) では、「$|r|<1$ を満たす実数 r に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} nr^n = 0$」という結果を用いるために、分母・分子を 5^n で割って、与えられた極限を $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1}{n\left(\frac{1}{5}\right)^n - 5^2}$ の形に表わします。この状態で極限をとり、$-\dfrac{1}{25}$ になることがわかります。ほとんどの人は、分子を $\dfrac{n}{5^n} - 5^2$ としたまま極限をとって値を導出していましたが、それでは根拠不足です。

■ 演習 1-2 について

ヒントにしたがって与えられた等式の左辺を書き換えると、$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{m+1}$ が得られます。その逆数をとると、$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1} = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$ が得られますが、直ちにこれを e とイコールで結ぶのは早計です。$\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{m+1} = \left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{m}\cdot\left(1+\dfrac{1}{m}\right)$ のように分解してから極限をとらなければなりません。

■ 第１回学習内容チェックシートについて

- ◦ Q2 の第 2 項目は、収束する 2 つの数列の和、差、積、商の極限に関する計算公式の確認についての問題でした。正答率は高かったですが、小さい枠の中に $\displaystyle\lim_{n\to\infty}$ を使って答えたシートがたくさんありました。α, β を用いて簡潔に答えましょう。
- • Q2 の最後の項目は、二項係数の定義と例に関する問題でした。$\dbinom{5}{0}$ の値を 0 と答えた人が何人もいましたが、一般に、自然数 n に対して $\dbinom{n}{0} = 1$ です。
- • Q3 は、1 次式の商の形で与えられている数列の極限を求めるときの手順と、そのような手順を経て極限を求める理由を説明する問題でした。手順は、分母と分子を n で割ってから、商の極限公式 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ を適用する、です。最初に分母と分子を n で割る理由は、そうしないと、分母も分子も $+\infty$ か $-\infty$ に発散してしまうからです。商の極限公式は、分母と分子がともに収束するとき（分母に関しては極限が 0 でないことも必要）に適用できる公式であるため、最初に分母と分子を n で割る操作が必要になります。

■ 次回予告

次回は関数に対する極限の概念を学びます。関数の極限に対しても数列の極限と同様の公式が成立することを説明し、それを用いた計算例を紹介します。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎１)・第２回 (2026 年 4 月 16 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。