

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎 2) 演習問題

2-1. 次の各級数の和を求めよ。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 8n + 15}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{5}\right)^{2n-1}$$

2-2. 調和級数が $+\infty$ に発散することの証明に習って、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2 \log n + 1)}$ は $+\infty$ に発散することを示せ。

ヒント： 積分の値を求めるときには、関数 $F(x) = \log(2 \log x + 1)$ を微分してみるとよい。

2025 年 10 月 1 日発行

■ 要再提出のチェックシートについて

今日返却した「第1回学習内容チェックシート」の左上に「要再提出」の印が押されている場合には、間違っている箇所をきれいに消した上、正しい答えを黒の鉛筆またはシャープペンで丁寧に書き込み、次の授業時に提出してください。右上に「確認」の印が押されている場合には、たとえ※印がついた箇所があったとしても、再提出する必要はありません。第1回学習内容チェックシートを再提出できるのは、次の授業時のみですので、注意してください。

■ 第1回学習内容チェックシートについて

- Q3 の第2項目は、収束する2つの数列の和、差、積、商の極限に関する計算公式の確認についての問題でした。正答率は100%に近かったですが、小さい枠の中に $\lim_{n \rightarrow \infty}$ を使って答えたシートがたくさんありました。 α, β を用いて簡潔に答えましょう。
- Q3 の第4項目は、ネイピア数の定義と近似値に関する問題でした。最初の枠に 2.71828..... という数値を書き入れたシートが数枚ありました。問題文に「数列の極限として」と指示されているわけですから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ を書き入れなければなりません。
- Q3 の最後の項目は、二項係数の定義と例に関する問題でした。 $\binom{5}{0}$ の値を0と答えた人が思いの外多かったことに驚きました。一般に、自然数 n に対して $\binom{n}{0} = 1$ です。

■ 演習 1-1(2) について

(1) の数列と同じように、分母と分子を n で割って極限を求めようとした人が何人もいましたが、それではうまく行きません。 $|r| < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$ となることを用いましょう。そのために、与えられた分数式の分母と分子を 5^n で割ります。すると、 $\frac{n3^n + 5^n}{n2^{n+1} + 5^{n+1}} = \frac{n\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1}{2n\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5}$ の形に書き換えることができます。上述の公式を適用したことがわかるように、分母と分子を 5^n で割ったとき、 $\frac{3^n}{5^n}, \frac{2^{n+1}}{5^n}$ のままにせず、 $\left(\frac{3}{5}\right)^n, 2\left(\frac{2}{5}\right)^n$ の形にまとめることが重要です。

■ 演習 1-2 について

ヒントのように、 $n = m + 1$ とおくと $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{m}{m+1}\right)^{m+1} = \frac{1}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}}$ と書き換えられます。ここで、勢い余って $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} = e$ と書いてしまいがちですが、 m 乗ではなく $(m+1)$ 乗になっているため、 $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \left(1 + \frac{1}{m}\right)$ と分解してから極限をとりましょう。

■ 次回予告

次回は関数の定義と極限、微分について学びます。関数の和、差、積、商および合成の定義とそれらに対する微分公式を復習します。多項式関数、指数関数、三角関数、対数関数の微分公式もおさらいします。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎2) ・ 第2回 (2025 年 10 月 1 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください (答えのみは評価しません)。