

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎 2) 演習問題

2-1. 次の各級数について、収束するかしないかを判定せよ (答えのみは不可)。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4 + 1}}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n - 2)}$$

2-2. 次の各級数について、絶対収束するかしないかを判定せよ (答えのみは不可)。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^{3n} \frac{n^{2n}}{(2n)!}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \frac{\log n}{(-3)^n}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ は既知としてよい。

2026 年 10 月 1 日発行

■ 学習内容チェックシートの修正方法

修正すべき解答に「※」を記しています。次のことを守り、その答えを書き直してください。

- 間違えている箇所を消しゴムで綺麗に消す。
- 黒の鉛筆またはシャープペンで正解を書き込む。

枠外に書く、赤ペンで修正するなど、ルールに法らない修正は、未修正と同じ評価になります。

■ 第1回学習内容チェックシートについて

- Q2 の 1 番目の設問は、等比級数の第 n 部分和を求めるための方法・方針を答える問題でした。公式 $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ に当てはめればよいという答えもかなりありましたが、答えて欲しいのは公式の導き方です。アイデアは $S_n - rS_n$ を計算するというのですが、その計算過程やそこからどのようにして公式を求めるのかも含めて書いてください。
- 収束しない級数は数列の場合と同様に発散するといいますが、発散する級数の中でも、 n を限りなく大きくしていったとき、第 n 部分和からなる数列がいくらでも大きな値をとるときには、 $+\infty$ に発散するといいますが、Q3 の 3 番目の枠には、単に発散するだけでなく「 $+\infty$ に発散する」と書き入れてください。

■ 演習 1-1 について

(1) 「第 n 部分和 S_n を求めてから、その極限をとる」という流れで解きます。 S_n を求めるには、分母を因数分解し、部分分数展開を行います。すると $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+5} \right)$ が得られます。 k に 1 から n まで順番に代入してこの和を計算すると、2 つおきに同じ数が現れてキャンセルすることがわかります。どこが生き残るのかを見定めて $S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \right)$ が得られます。この極限として、与えられた級数の和が $\frac{9}{40}$ と求まります。

(2) 与えられた級数は無限等比級数ですが、そのことを示さずに、初項と公比を求めて公式に当てはめた答案が多かったです。まず、与えられた級数を $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ の形に変形し、 $|r| < 1$ を確認してから公式を適用してください。結果は $-\frac{12}{25}$ になります。

■ 演習 1-2 について

この問題は、途中でヒントを利用して、調和級数が $+\infty$ に発散することの証明 ([例 1-4-1]) を素直に真似ると証明が完成します。多くの人は問題の指示に従っていましたが、そうせずに、「積分判定法」を使って示そうとした人も一定数いました。単に「解くこと」が演習の目的ではないので、そのような答案は評価しません。きちんと話を聴き、アブストラクトの理解を深めようと、努力してください。

■ 次回予告

次回はべき級数について学びます。べき級数とは“無限に項が続く多項式”のようなものです。ある種の関数はべき級数で表わすことができることを説明します。例えば、指数関数や三角関数はべき級数で表わすことができます。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎 2) ・ 第 2 回 (2026 年 10 月 1 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。