No.3 2026 年 4 月 23 日

線形代数 1 演習問題

3-1. (ブロック計算)

(1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

を適当に 4 つの小行列に分割することにより、A^2 を計算せよ (分割の仕方も書くこと)。

(2) 行列

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

を適当に小行列に分割することにより、B^2 を計算せよ。

3-2. (A の冪乗)

a, b を実数とする。行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ について、

(1) A^2, A^3 を計算せよ。

(2) A の k 乗を予測し、それを求めよ。

線形代数１通信 [No.3] 2026 年 4 月 23 日発行

■ 第２回学習内容チェックシートについて

- ∘ Q1 の表の最初の問いは「単位行列とは？」というものでした。単位行列の定義は [補題 2-2-2(2)] に書かれています。その主張を丸々書き込んだものや単位行列の性質 (2-2c) を書き込んだものがいくつかありましたが、ここでは単位行列の定義を答えてください。つまり、「対角成分が 1 で、残りの成分がすべて 0 であるような正方行列のこと」、あるいは、具体的に (2-2b) の行列 E_n を書いて、この行列のこと、のように書いてください。
- ∘ Q2 の第 4 項目は行列同士の積 AB を行列とベクトルの積で書くとどうかけるかという問題でした。(2-1a) の右辺と同じ要領で枠を埋めればよいのですが、ベクトルを表記するときの原則を怠っているものが非常に多かったです。各 $\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n$ を二重化した表現に書き直したものにしなければなりません (アブストラクト 3 ページ, 第 1-4 節を参照)。
- ∘ Q2 の第 5 項目は積 AB の (i,j)-成分を答える問題でした。余計な括弧がついていたり、$a_{ik}b_{kj}$ までで止まっているシートがありました。問題の設定では、$A=(a_{ik})$ は (l,m)-行列で、$B=(a_{kj})$ は (m,n)-行列なので、アブストラクト 10 ページの (2-1c) と同じ設定です。よって、当該の枠には、c_{ij} の右辺を書き入れます。

■ 演習 2-1 について

(1) は解答のみ記しておきます。$AB = \begin{pmatrix} -12 & -7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -12 & -1 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$.

(2) については、事前練習用演習問題と同じように理由を書かなければなりません。$(1,1)$-成分は等しいので、他の成分を比較します。すると、AB と BA において $(1,2)$-成分と $(2,1)$-成分が異なっていることがわかりますが、両方書くのは書き過ぎで、どちらか一方の成分についてのみ書くようにします。

■ 演習 2-2 について

不注意による計算ミスが多かったですが、概ねできているように感じました。計算結果は次のようになります。$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{2} & 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $A^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -3 \\ 10 & 20 & -6 \\ -3 & -6 & 45 \end{pmatrix}$, $AA^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 28 & 4\sqrt{6} \\ 4\sqrt{6} & 42 \end{pmatrix}$.

計算して気づいたと思いますが、$A^{\mathrm{T}}A$ と AA^{T} に並ぶ数字は、対角成分上を通る直線に関して対称になっています。実際、これは任意の行列 A に対して正しく、$X = A^{\mathrm{T}}A$ に関しては $X^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A = X$ となることからわかり、$Y = AA^{\mathrm{T}}$ に関しても同様に示すことができます。

■ 訂正

[補題 2-4-2] の (2) において、「n 次正方行列 E_n」と記されていましたが、「n 次単位行列 E_n」の誤りです。HP 上の pdf ファイルは修正版に差し替えてあります。

■ 次回予告

次回は、解が１つに定まるような連立一次方程式に対してガウスの消去法を学びます。さらに、連立一次方程式を行列で表現する方法—拡大係数行列の概念—と、連立一次方程式を解くための基本操作の行列による言い換え—行基本変形の概念—行列の階数、階段行列を説明します。

線形代数１・第３回 (2026 年 4 月 23 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。