No.3 2024 年 10 月 10 日

線形代数 2 演習問題

3-1. (直交行列)

n 次正方行列 P, Q が共に直交行列であるとき、$2n$ 次正方行列 $R = \begin{pmatrix} \mathrm{O} & P \\ Q & \mathrm{O} \end{pmatrix}$ も直交行列であることを示せ。但し、O は零行列とする。

3-2. (対称行列の固有値・固有ベクトル)

対称行列 $A = \begin{pmatrix} 7 & -8 & -8 \\ -8 & 8 & -9 \\ -8 & -9 & 8 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値を求めよ。

(2) A の最大固有値 λ に対して、λ に属する A の固有ベクトルを求めよ。

線形代数２通信 [No.3] 2024年10月10日発行

■ 演習 2-1 について

pre2-1 と同じ方法で解答することができます。計算過程の記述が不十分なもの、θ を説明なしに使っているものがありました。事前練習用問題や以下に記す演習 2-1 の略解では途中の計算は省いていますが、解答シートには省略することなく書くようにしてください。

(1) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -10\sqrt{3},\ \|\mathbf{x}\| = \sqrt{16} = 4,\ \|\mathbf{y}\| = \sqrt{25} = 5$ より、$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ のなす角を θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とおくと、$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となります。したがって、$\theta = \dfrac{5}{6}\pi$ です。

(2) 3 次元ベクトルなので、直交するベクトルを求めるために外積を利用することができます。計算により $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -4 \\ -\sqrt{3} \\ -9 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 4 \\ \sqrt{3} \\ 9 \end{pmatrix}$ とわかります。これは $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の両方に直交するベクトルの 1 つですが、$\mathbb{R}^3$ において 2 つの一次独立なベクトルに直交するベクトルは定数倍を除いて 1 つなので、$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ に直交する $\mathbb{R}^3$ の任意のベクトルは $t\begin{pmatrix} 4 \\ \sqrt{3} \\ 9 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ により与えられます (外積の計算に出てきた -1 倍は t の中に取り込めるので書かなくても問題ありません)。

この問題は、pre2-1(2) のヒントと略解にも書かれているように、求めるベクトルを $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおき、$\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle = 0$ を x, y, z に関して解くことによっても求めることができます。この方針を採用した人も少なからずいました。ただし、連立方程式をきちんと解くことができなかった人がほとんどでした。春学期に学んだ「ガウスの消去法」がまだ身についていないようです。今後も連立一次方程式を解く場面が出てきます。解けなかった人は、しっかり「ガウスの消去法」を復習しておいてください。

■ 演習 2-2 について

pre2-2 と同じ方法で解答することができます。

(1) $\langle \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_3,\ \mathbf{u}_3 \rangle = 1$ かつ $\langle \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_3 \rangle = \langle \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3 \rangle = 0$ となることを確かめるだけです。計算の過程は省略せずに書いてください。

(2) いきなり、$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x},\ \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{x},\ \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2 + \langle \mathbf{x},\ \mathbf{u}_3 \rangle \mathbf{u}_3$ と書いてはいけません。このように $\mathbf{x}$ が表わされるのは、"$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$" が $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底であるからで、そうでない場合にはこのような等式は成立しません。「"$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$" が $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底なので」あるいは「(1) より」など、等号成立の根拠を書き添える必要があります。

■ 次回予告

次回は、ベクトルの正射影、グラム-シュミットの直交化法、直交行列による対称行列の対角化について学びます。

線形代数２・第３回 (2024 年 10 月 10 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。