線形代数 3 演習問題

3-1. $\mathbb{C}^3$ のベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}$ によって張られる $\mathbb{C}^3$ の 1 次元部分空間を L とし、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ i \end{pmatrix}$ によって張られる $\mathbb{C}^3$ の 2 次元部分空間を W とおく。$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ の L への正射影と W への正射影を求めよ。

3-2. X, Y を不定元とする 3 次同次多項式の全体

$$\mathbb{R}^{(3)}[X,Y] = \{\ aX^3 + bX^2Y + cXY^2 + dY^3 \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\ \}$$

には、次のような内積が入る：

$$\langle f(X,Y), g(X,Y) \rangle = f\Big(\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}\Big) g(X,Y) \qquad (f(X,Y), g(X,Y) \in \mathbb{R}^{(3)}[X,Y]).$$

ここで、右辺は、例えば $f(X,Y) = X^kY^l$ のときには $g(X,Y)$ を X で k 回、Y で l 回偏微分して得られる多項式（実際には実数値）を表わす。

(1) $g(X,Y) = aX^3 + bX^2Y + cXY^2 + dY^3$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ に対して、内積

$$\langle X^3, g(X,Y) \rangle,\ \langle X^2Y, g(X,Y) \rangle,\ \langle XY^2, g(X,Y) \rangle,\ \langle Y^3, g(X,Y) \rangle$$

の値を求めよ。

(2) 上の計算結果を利用して、$\mathbb{R}^{(3)}[X,Y]$ の 1 組の正規直交基底を見つけよ。

線形代数３通信　[No.3]　2025年4月21日発行

■ 第2回学習内容チェックシートについて

- ◦ Q1(1) の 4 つの値はすべて (実部) $+\,i$(虚部) の形で答えてください。特に、商の値を計算していないものがいくつかありました。
- ◦ Q2(1) は複素ベクトル空間上のエルミート内積と実ベクトル空間上の内積の違いを説明する問題ですから、複素ベクトル空間上のエルミート内積は○○である一方、実ベクトル空間上の内積は□□である、のように違う部分を対比させて書くようにします。具体的には、$\langle\ ,\ \rangle$ が実ベクトル空間上の内積の場合、ベクトル v, u とスカラー α に対して $\langle v, \alpha u\rangle = \alpha\langle v, u\rangle$, $\langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle$ となるが、複素ベクトル空間上のエルミート内積の場合、$\langle v, \alpha u\rangle = \overline{\alpha}\langle v, u\rangle$, $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$ でなければならない、などと書くとよいでしょう。

■ 演習 2-1 について

(1) $\alpha = a + ib,\ \beta = c + id\ (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ とおいて計算した人がたくさんいましたが、そうすると複雑になってしまいます。まず、直交条件から等式 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle = 0$ を立てることができます。エルミート内積の計算では、$\mathbf{u}$ の各成分は複素共役をとる必要があることに注意して

$$(*1)\qquad 2\sqrt{3}\alpha + (3 + 2i)\beta = 0$$

が得られます。また、ノルムが 1 という条件から

$$(*2)\qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

が得られます。$(*1)$ より $\alpha = -\frac{3+2i}{2\sqrt{3}}\beta$ と表わされるので $|\alpha| = \left|\frac{3+2i}{2\sqrt{3}}\right| \cdot |\beta| = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}|\beta|$ であり、これを $(*2)$ に代入して $|\beta| = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ が得られます。

(2) (1) の結果より $\beta = \frac{2\sqrt{3}}{5}e^{i\theta}\ (\theta \in \mathbb{R})$ と表わすことができ、このとき $\alpha = -\frac{3+2i}{5}e^{i\theta}$ となるため、条件を満たすベクトルは $\mathbf{v} = \dfrac{1}{5}e^{i\theta}\begin{pmatrix} -3-2i \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}\ (\theta \in \mathbb{R})$ により与えられることがわかります。

■ 演習 2-2 について

(1) $\gamma_j = a_j + ib_j\ (a_j, b_j \in \mathbb{R})$ とおき、複素数値関数の積分の定義に従って計算します。$x \in [0, 1]$ に対して $h(x) = (a_0x^2 + a_1x + a_2) + i(b_0x^2 + b_1x + b_2)$ となるので

$$\begin{aligned}\int_0^1 h(x)dx &= \int_0^1 (a_0x^2 + a_1x + a_2)dx + i\int_0^1 (b_0x^2 + b_1x + b_2)dx \\ &= \Big[\frac{a_0}{3}x^3 + \frac{a_1}{2}x^2 + a_2x\Big]_0^1 + i\Big[\frac{b_0}{3}x^3 + \frac{b_1}{2}x^2 + b_2x\Big]_0^1 \\ &= \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{2} + a_2 + \Big(\frac{b_0}{3} + \frac{b_1}{2} + b_2\Big) = \frac{\gamma_0}{3} + \frac{\gamma_1}{2} + \gamma_2.\end{aligned}$$

(2) $x \in [0, 1]$ に対して $f(x)\overline{g(x)} = \alpha_0\overline{\beta}_0x^2 + (\alpha_1\overline{\beta}_0 + \alpha_0\overline{\beta}_1)x + \alpha_1\overline{\beta}_1$ となることから、(1) で求めた結果を用いて $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{3}\alpha_0\overline{\beta}_0 + \dfrac{1}{2}(\alpha_1\overline{\beta}_0 + \alpha_0\overline{\beta}_1) + \alpha_1\overline{\beta}_1$ が得られます。

■ 次回予告

次回は、基底から正規直交基底を作るためのアルゴリズムとして知られる、グラム-シュミットの直交化法を説明します。さらに、有限次元計量空間の任意の部分空間 W に対して直交補空間と呼ばれる部分空間が定まることを示し、これを用いて W への正射影の存在を導きます。

線形代数３・第３回 (2025 年 4 月 21 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 ________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。