No.3 2025年10月6日

線形代数4 演習問題

3-1. 8 文字の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 7 & 1 & 5 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。

(1) σ を互いに共通の文字を含まない巡回置換の積で表わせ。

(2) σ を互換の積で表わせ。

(3) $\operatorname{sgn}\sigma$ を求めよ。

3-2. $2n$ 文字の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n & n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

の符号 $\operatorname{sgn}\sigma$ を求めよ。

線形代数４通信　[No.3]　2025 年 10 月 6 日発行

■ 第２回学習内容チェックシートについて

- ◦ Q3(2) は $|\mathbf{e}_{\sigma(1)}\cdots\mathbf{e}_{\sigma(n)}|$ を順列 σ の転倒数 $N(\sigma)$ を用いてどのように表わされるのかを答える問題でした。$N(\sigma)$ 回列を入れ替えると $|\mathbf{e}_1\cdots\mathbf{e}_n| = 1$ になりますが、2 つの列を入れ替えると行列式の符号が変わるので、$|\mathbf{e}_{\sigma(1)}\cdots\mathbf{e}_{\sigma(n)}| = (-1)^{N(\sigma)}$ となります。
- ◦ Q3(4) は、第 1 行から 3 番目を選び、第 2 行から 1 番目を選び、第 3 行から 4 番目を選び、第 4 行から 2 番目を選ぶ正方形の選び方に対応する、$|A|$ の項を求める問題でした。定義より、その項は $(-1)^{N(3,1,4,2)}c\cdot b\cdot b\cdot a = (-1)^{N(3,1,4,2)}ab^2c$ となります。ここで止めた人もいましたが、$N(3,1,4,2)$ を計算し、$(-1)^{N(3,1,4,2)}ab^2c$ 全体の値も書いてください。

■ 演習 2-1 について

0 の数字が入らない正方形の選び方は、第 2 行から第 $(n-2)$ 行までは 1 通りしかありません。第 1 行からは 2 番目か n 番目を選ぶしかなく、そのどちらを選ぶかで第 $(n-1)$ 行と第 n 行から選ぶ正方形の場所は決まってしまいます。結局、与えられた行列式の値は

$$(-1)^{N(2,3,\cdots,n-1,n,1)}1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n + (-1)^{N(n,3,\cdots,n-1,1,2)}n\cdot 2\cdots(n-2)\cdot(n+1)\cdot(n-1)$$
$$= (-1)^{N(2,3,\cdots,n-1,n,1)}n! + (-1)^{N(n,3,\cdots,n-1,1,2)}(n+1)! \quad \cdots\cdots(*)$$

になるわけです。あとは転倒数を計算します。定義より

$$N(2,3,\cdots,n-1,n,1) = (n-1)+0+\cdots+0 = n-1,$$
$$N(n,3,\cdots,n-1,1,2) = (n-2)+(n-2)+\overbrace{1+\cdots+1}^{n-3}+0 = 3n-7$$

となるので、問題の行列式は次の値になります：

$$(*) = (-1)^{n-1}n! + (-1)^{3n-7}(n+1)! = (-1)^{n-1}n! + (-1)^{n-1}(n+1)! = (-1)^{n-1}(n+2)(n!).$$

■ 演習 2-2 について

値は $2abc(a+b+c)^3$ です。「ある行 (または列) の定数倍を他の行 (あるいは列) に加えても、行列式の値は変わらない」という性質を使って、同じ因数をくくり出せる状況を作り、出来るだけ 1 つの行や列に 0 を増やしてからその行や列に関して余因子展開するように心がけます。

まず、第 2 行と第 3 行を第 1 行に加えてみましょう。すると、第 1 行から $(a+b+c)$ をくくり出すことができます。続いて、第 2 列と第 3 列を第 1 列に加えます。すると、第 1 列から $(a+b+c)$ をくくり出すことができます。この時点で与えられた行列式は次の形になります：

$$(a+b+c)^2\begin{vmatrix} 2 & c+a & a+b \\ c+a & (c+a)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

次に、第 1 行の $-\frac{c+a}{2}$ 倍を第 2 行に加え、第 1 行の $-\frac{a+b}{2}$ 倍を第 3 行に加えて、第 1 列に関して余因子展開します。得られた 2 次行列式を計算して、$2abc(a+b+c)^3$ が求められます。

■ 次回予告

次回は、順列の転倒数 (あるいは、置換の符号) に基づく行列式の定義から出発して、行列式の諸性質 (Det0), (Det1), $\cdots$, (Det5) を導出します。また、別の側面として、行列式が平行体の (符号付き) 体積と捉えられることを説明します。

線形代数4・第3回 (2025年10月6日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。