

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎 2) 演習問題

3-1. 関数 $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2}$ ($x^2 + 3x + 2 \neq 0$) について、次の各極限を求めよ (答えのみは不可)。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2}$$

3-2. 次の関数を微分せよ (計算過程がわかるように書くこと)。

$$(1) f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{-\frac{x}{2}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$(2) g(x) = \sin(x^2)(\log(5x))^3 \quad (x > 0)$$

2025 年 10 月 8 日発行

■ 第2回学習内容チェックシートについて

- Q2 の 1 番目は、等比級数の第 n 部分和を求めるための方法・方針を答える問題でした。公式だけの解答も多数ありましたが、この問題で答えて欲しかったのは公式の導き方です。 $S_n - rS_n$ を計算すると、途中の項が打ち消しあって $S_n - rS_n = a - ar^n$ となりますね。この等式から公式 $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ が得られます。この一連の過程を書いてください。
また、 $n \rightarrow \infty$ としたときの S_n の極限をとって級数の和まで書いたシートもありました。この問いではそこまで尋ねていません。問われたことについてのみ、解答するようにしてください。
- Q3 の第 3 項目は、ネイピア数 e の無限級数の和としての表示を答える問題でしたが、なぜか $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ を書き入れたシートが沢山ありました。ここに書くべき式は (2-6b) の中央もしくは一番右の式です。

■ 演習 2-1 について

単純な計算ミスを除けば、よくできていました。ただし、級数の形のまま和を計算している人が沢山いました。級数の和を求めるときには、まず、与えられた級数の第 n 部分和 S_n を計算し、それから $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を計算するようにしましょう。

(1) の場合、 $\frac{1}{k^2 + 8k + 15} = \frac{1}{(k+3)(k+5)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+5} \right)$ と変形してから計算します。 $S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \right)$ となるので $n \rightarrow \infty$ とすることで与えられた級数の和が $\frac{9}{40}$ のように求まります。(2) の場合、与えられた級数は $(-1)^n \left(\frac{2}{5} \right)^{2n-1} = (-1)^n \left(\left(\frac{2}{5} \right)^2 \right)^n \left(\frac{2}{5} \right)^{-1} = \frac{5}{2} \left(-\frac{4}{25} \right)^n$ を用いて書き換えることで、初項 $a = \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{4}{25} \right) = -\frac{2}{5}$ 、公比 $r = -\frac{4}{25}$ の等比級数であることがわかります。 $|r| < 1$ であるため、等比級数の和の公式を適用することができ、和が $-\frac{10}{29}$ のように求まります。

■ 演習 2-2 について

この問題は、途中でヒントを利用して、調和級数が $+\infty$ に発散することの証明を素直に真似ると証明が完成するのですが、あまり出来はよくありませんでした。特別な条件を満たす正項級数の収束・発散を、積分を使って判定する「積分判定法」を持ち出して解いた人も何人かいました。条件をきちんと確かめた上で判定法を使うことは決して悪くないのですが、今回は授業の中で、調和級数が $+\infty$ に発散する理由を詳しく説明していますから、判定法を使わずに解いてもらいたかったです。公式や判定法は条件がきちんと揃わないと適用できませんが、それを導いたときのアイデアを理解していると、条件が揃っていなくてもそのアイデアを真似ることで問題が解決できることもあります。アイデアを理解することは大切です。

■ 次回予告

次回からいよいよ 2 変数関数の微積分に入ります。今回は、本格的に 2 変数関数の微積分を学ぶための準備として、2 変数関数のグラフ、平面の 2 点間の距離、収束、連続性などの概念を学びます。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎2) ・ 第3回 (2025 年 10 月 8 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください (答えのみは評価しません)。