

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎 2) 演習問題

3-1. 次のべき級数の収束半径を求めよ (答えのみは不可)。

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} x^n = 1 + 2x + \frac{9}{2}x^2 + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n!} x^n + \cdots$$

$$(2) \sum_{m=0}^{\infty} m(-2)^m x^{3m} = -2x^3 + 8x^6 - \cdots + m(-2)^m x^{3m} + \cdots$$

3-2. (1) 余弦関数の Maclaurin 級数展開を既知とし、倍角の公式を利用して、関数 $\cos^2 x$ ($x \in \mathbb{R}$) の Maclaurin 級数展開を求めよ。

(2) m を自然数、 x を実数として、

$$R_{2m} = (-1)^m \int_0^x \frac{t^{2m}}{1+t^2} dt$$

とおく。等式

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^{m-1} t^{2(m-1)} + (-1)^m \frac{t^{2m}}{1+t^2} \quad (t \in \mathbb{R})$$

の両辺を 0 から x まで積分し、 $|x| < 1$ のとき $|R_{2m}| \leq \int_0^1 t^{2m} dt$ となることを用いて、逆正接関数 $\tan^{-1}(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) の開区間 $(-1, 1)$ における Maclaurin 級数展開を求めよ。

2026 年 10 月 8 日発行

■ 第2回学習内容チェックシート Q2 の第3項目について

Q2 の第3項目は、正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が $+\infty$ に発散するための一つの十分条件を述べたものです。最初の枠と最後の枠に「発散」と書き入れた解答が多かったです。正項級数に対しては、発散する(=収束しない)ことと $+\infty$ に発散することは同義なので、「発散」という答えは間違っていないのですが、より正確に「 $+\infty$ に発散」と書いてください。

■ 演習 2-1 について

(1) はよくできていました。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して $\sqrt{n^4+1} > \sqrt{n^4} = n^2$ となることから $\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} < \frac{1}{n^2}$ が得られ、正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ が収束することと比較判定法を用いて、与えられた正項級数も収束することがわかります。 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ が収束することの証明を書いた人もいましたが、この結果は授業の中で証明しているので、使って構いません。

(2) はダ・ランベールの判定法を使います。 $a_n = \frac{n^n}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおいて極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ を計算する際に、 $\frac{n+1}{3n+1}$ のまま極限の値を書いている答案が多かったです。一旦、分母・分子を n で割ってから極限をとりましょう。計算すると $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{3} < 1$ がわかるので、ダ・ランベールの判定法を適用して、与えられた正項級数は収束することがわかります。

■ 演習 2-2 について

(1) は、与えられた級数の第 n 項の絶対値をとって作った正項級数に対して、ダ・ランベールの判定法を用いて調べます。 $a_n = 2^{3n} \frac{n^{2n}}{(2n)!}$ とおくと、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^3(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{4(1+\frac{1}{n})}{2+\frac{1}{n}} \left((1+\frac{1}{n})^n \right)^2 \rightarrow 2e^2 > 1 \quad (n \rightarrow \infty \text{ のとき})$$

となるため、 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{3n} \frac{n^{2n}}{(2n)!}$ は $+\infty$ に発散し、したがって、与えられた級数は絶対収束しないことがわかります。波線部分のように変形せずに極限值を書いた答案が多かったです。

(2) $\sin(\frac{n\pi}{4})$ は色々な値を取るため、与えられた級数の第 n 項の絶対値をとった後も複雑です。そこで、 $|\sin x| \leq 1$ に注意して、正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{3^n}$ が収束するか否かをダ・ランベールの判定法を用いて調べます。その際、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{\log n}$ の値を求める必要が出てきますが、不定形の極限ですから、ロピタルの定理を適用するなどの求め方を記す必要があります。実は $\log(n+1) = \log n(1+\frac{1}{n}) = \log n + \log(1+\frac{1}{n})$ のように変形すれば、ロピタルの定理を使わずに極限を求めることができます。また、 $\log n \leq n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を用いて正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ の収束の問題に帰着させようとした答案も多かったですが、この不等式の成立理由を書く必要があります。いずれにしても、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{3^n}$ は収束することがわかり、比較判定法により $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sin(\frac{n\pi}{4}) \right| \frac{\log n}{(-3)^n}$ も収束するため、与えられた級数は絶対収束することがいえます。

■ 次回予告

次回からいよいよ2変数関数の微積分に入ります。今回は、その手始めとして、2変数関数のグラフ、平面の2点間の距離、収束、連続性などの概念を学びます。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎 2) ・ 第 3 回 (2026 年 10 月 8 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。