No.4 2024年5月2日

# 線形代数1演習問題

**4-1**. (ベクトルの直交条件)

(1) 2 つの 3 次ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ に直交するような $\mathbf{0}$ でない 3 次ベクトルを 1 つ求めよ。

(2) 座標空間において、3 次ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ に垂直な原点を通る平面は、どのような 2 つのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ によって張られる平面になるか？そのような $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ を具体的に 1 組挙げよ。

**4-2**. (平面の方程式)

(1) $(x, y, z)$-座標空間において、方程式 $2x + 3y + 5z = 7$ を満たす実数の組 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の全体はどのような幾何学的対象を表わしているか。理由をつけて答えよ。

(2) $(x, y, z)$-座標空間において、点 $\mathrm{P}_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ を通り、ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$ に垂直な平面の方程式を求めよ。

# 線形代数１通信 [No.4]

2024 年 5 月 2 日発行

## ■ 演習 3-1 について

(1) よくできていました。$A=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ のように分割線を入れて、小ブロックに分けます。右上の小ブロックが零行列であることを利用して計算することにより、

$$A^2=\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 9 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

となることがわかります。

(2) 小ブロックが 3 次正方行列となるように分割して計算した人が圧倒的に多かったですが、$B$ の中に (1) の行列 $A$ が含まれていることを見抜き、$B=\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & \mathrm{O} & 0 \\ \hline \mathrm{O} & A & \mathrm{O} \\ \hline 0 & \mathrm{O} & -2 \end{array}\right)$ のように分割線を入れてブロック計算した方が楽に計算できます。実際、次のように計算することができます。

$$B^2=\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & \mathrm{O} & 0 \\ \hline \mathrm{O} & A^2 & \mathrm{O} \\ \hline 0 & \mathrm{O} & 4 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -1 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

## ■ 演習 3-2 について

(1) 行列の積の定義から $A^2=\begin{pmatrix} 1+a & 1+a \\ a+a^2 & a+a^2 \end{pmatrix}$, $A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1+2a+a^2 & 1+2a+a^2 \\ a+2a^2+a^3 & a+2a^2+a^3 \end{pmatrix}$ となります。

(2) $A^2, A^3$ はそれぞれ $A^2=(1+a)A$, $A^3=(1+a)A^2=(1+a)^2A$ と表わされることから、$A^k$ は $A^k=(1+a)^kA$ になることが予測できます。証明までは書く必要はありませんが、予測した根拠がわかるように、説明を付けてください。

## ■ 第３回学習内容チェックシートについて

全体の出来はよかった一方で、空欄のあるシートと訂正方法が指示に従っていない再提出のシートが多数ありました。そのようなシートは未提出扱いと未修正扱いになりますので、気をつけてください ( もう一度「授業の進め方」と「線形代数１通信 No.1」を再読してください)。

Q2 の第 3 項目の中に、4 次正方行列 $A, B$ に分割線を入れて答える枠がありますが、分割線が入っていない (つまり、未解答の) シートが多数ありました。分割線を入れる箇所は、$A$ については第 1 列と第 2 列の間、および、第 2 行と第 3 行の間、$B$ については第 2 列と第 3 列の間、および、第 1 行と第 2 行の間が候補になります。この分割線の入れ方は、Q2 の第 2 項目の条件を満たしているので、この分割線の入れ方でよいことがわかります。

## ■ 次回予告

次回は、解が１つに定まるような連立一次方程式に対してガウスの消去法を学びます。さらに、連立一次方程式を行列で表現する方法—拡大係数行列の概念—と、連立一次方程式を解くための基本操作の行列による言い換え—行基本変形の概念—行列の階数、階段行列を説明します。

**線形代数１・第４回 (2024 年 5 月 2 日) 演習問題解答シート**

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 ________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。