No.4 2026年4月30日

# 線形代数1演習問題

**4-1**. (ガウスの消去法)

次の連立一次方程式をガウスの消去法によって解け（連立一次方程式を解く過程は、拡大係数行列の変形によって記述してよい)。

$$\begin{cases} x + y + 2z - w = 1 \\ 3x + 2y + z + w = 2 \\ x - y - z + 4w = 3 \\ 2x + 3y - 5z + 3w = 1 \end{cases}$$

**4-2**. (階段行列と階数)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -7 & -3 & -7 \\ -2 & 2 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

について、

(1) $A$ に有限回行基本変形を施して、階段型にせよ。

(2) $\mathrm{rank}\, A$ を求めよ。

## 線形代数１通信　[No.4]　2026 年 4 月 30 日発行

### ■ 演習 3-1 について

(1) よくできていました。$A$ の左下に 0 がひとかたまりにあるので、$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$ のように分割線を入れてブロック計算を行い、次の結果を得ることができます。

$$A^2 = \left(\begin{array}{cc|cc} -5 & -6 & 0 & 2 \\ 9 & 10 & -5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

(2) 授業中にヒントを出したのですが、うまく分割できなかった人が多かったです。小ブロックが 3 次正方行列となるように分割して計算してもよいのですが、$B$ の中に (1) の行列 $A$ が含まれていることを見抜き、$B = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & \mathrm{O} & 0 \\ \hline \mathrm{O} & A & \mathrm{O} \\ \hline 0 & \mathrm{O} & -2 \end{array}\right)$ のように分割線を入れてブロック計算すると、$B^2 = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & \mathrm{O} & 0 \\ \hline \mathrm{O} & A^2 & \mathrm{O} \\ \hline 0 & \mathrm{O} & 4 \end{array}\right)$ となるので、$A^2$ の部分に (1) で計算した結果を書き込めば、$B^2$ が求められます。

### ■ 演習 3-2 について

(1) については、全体的にはよくできていたものの、$A^3$ の計算を間違えている答案もいくつかありました。積の計算がまだおぼつかないような印象を持ちました。(2) は予測が正しくないものや答えのみのものが多かったです。

(1) 行列の積の定義から $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a(1+b) \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$, $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & a(1+b+b^2) \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}$ となります。

(2) (1) の結果から、$A^k = \begin{pmatrix} 1 & a(1+b+\cdots+b^{k-1}) \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$ になることが予測できます。この予測が実際に正しいことは数学的帰納法により確かめることができます。厳密な証明までは書く必要はありませんが、予測した根拠がわかるように、説明を付けてください。

### ■ 第３回学習内容チェックシートについて

全体の出来はよかった一方で、空欄のあるシートが多数ありました。そのようなシートは未提出扱いになりますので、気をつけてください ( もう一度「授業の進め方」と「線形代数１通信 No.1」を再読してください)。

Q2 の第 3 項目の中に、4 次正方行列 $A, B$ に分割線を入れて答える枠がありますが、分割線が入っていない (つまり、未解答の) シートが多数ありました。分割線を入れる箇所は、$A$ については第 1 列と第 2 列の間、および、第 2 行と第 3 行の間、$B$ については第 2 列と第 3 列の間、および、第 1 行と第 2 行の間が候補になります。この分割線の入れ方は、Q2 の第 2 項目の条件を満たしているので、この分割線の入れ方でよいことがわかります。

### ■ 次回予告

次回は、一般の $n$ 次正則行列に対して、逆行列を求める方法を学びます。これと関連して、逆行列の持つ性質、行基本変形が行列を左から掛けることによって実現されることも学びます。

**線形代数１・第 4 回 (2026 年 4 月 30 日) 演習問題解答シート**

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

---

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。