No.4 2024年10月17日

線形代数2演習問題

4-1. (対称行列の直交行列による対角化)

行列 $A = \begin{pmatrix} -11 & -4 & 2 \\ -4 & -11 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値を求めよ。

(2) A の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^3$ の基底を1組求めよ。

(3) (2) で求めた $\mathbb{R}^3$ の基底に対して、グラム-シュミットの直交化法を適用して、$\mathbb{R}^3$ の正規直交基底を1組求めよ。

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P を求めよ。また、そのときの $P^{-1}AP$ を求めよ。

線形代数２通信 [No.4]

2024 年 10 月 17 日発行

■ 第３回学習内容チェックシートについて

- Q3 の表の 2 つ目では、「$\mathbf{p}$ が存在するときの.......」という書き方をした人が数名いましたが、固有ベクトルの定義において「存在する・しない」は問わないので、「$A\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}$ を満たす $\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ のこと」のように答えてください。
- Q4 の表の 1 つ目では、「固有多項式 $\Delta_A(x)$ を計算する」という解答がいくつかありました。そのあと何をすれば固有値が求められるのかまで書いてください。
- Q4 の表の 2 つ目については「連立一次方程式 $(\lambda E_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解く」という解答がとてもたくさんありました。固有ベクトルには零ベクトルは含まれないので、固有ベクトルを求める場合には、まず、(ガウスの消去法を用いて) 連立一次方程式を解き、そのあとに、零ベクトルを除くという操作が必要です。

■ 演習 3-1 について

P, Q が直交行列のとき、$R = \begin{pmatrix} \mathrm{O} & P \\ Q & \mathrm{O} \end{pmatrix}$ も直交行列であることを示す問題です。正答率は 4 割程度あり、高かったです。

R が [定理 3-2-5] に書かれている同値な条件のいずれかを満たすことを示せばよいのですが、ここでは $R^{\mathrm{T}}R$ が単位行列になることを示しましょう。$R^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \mathrm{O}^{\mathrm{T}} & Q^{\mathrm{T}} \\ P^{\mathrm{T}} & \mathrm{O}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{O} & Q^{\mathrm{T}} \\ P^{\mathrm{T}} & \mathrm{O} \end{pmatrix}$ となるので、積 $R^{\mathrm{T}}R$ を計算すると $\begin{pmatrix} Q^{\mathrm{T}}Q & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & P^{\mathrm{T}}P \end{pmatrix}$ となります。P, Q が直交行列であることから $Q^{\mathrm{T}}Q = P^{\mathrm{T}}P = E_n$ が成立するので、$R^{\mathrm{T}}R = E_{2n}$ が得られます。

■ 演習 3-2 について

(1) $\Delta_A(x) = |xE_3 - A|$ を計算し、方程式 $\Delta_A(x) = 0$ を解けば、その実数解として A の固有値が求まります。まず、$|xE_3 - A|$ の第 2 行、第 3 行を第 1 行に足し上げて、第 1 行から $x+9$ をくくり出します。すると、$(x+9)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & x-8 & 9 \\ 8 & 9 & x-8 \end{vmatrix}$ となります。次に、第 1 列の (-1) 倍を第 2 列と第 3 列にそれぞれ加えて、第 1 行に関して余因子展開を行います。すると、$(x+9)\begin{vmatrix} x-16 & 1 \\ 1 & x-16 \end{vmatrix}$ となります。この 2 次行列式は $(x-16)^2 - 1 = (x-15)(x-17)$ のように因数分解できるので、A の固有値は $-9, 15, 17$ であることがわかります。

(2) (1) の計算結果から、A の最大固有値は 17 です。したがって、固有値 17 に属する固有ベクトルを求めます。しかしながら、事前練習用演習問題の略解を見ながら解答したためと思われますが、すべての固有値に属する固有ベクトルを求めた答案が 10 枚程度ありました。

さて、固有値 17 に属する固有ベクトルですが、これは $17E_3 - A$ に行基本変形を施して階段行列にして計算することにより、$t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R},\ t \neq 0)$ により与えられることがわかります。

■ 次回予告

次回は、数ベクトル空間の部分空間を学びます。数ベクトル空間の部分空間は、抽象ベクトル空間へ移行する際の中継的役割を担う重要な概念です。特に、部分空間とその基底、ベクトルによって張られる部分空間、連立一次方程式の解空間の基底の求め方を学びます。

線形代数２・第４回 (2024 年 10 月 17 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。