No.4 2026 年 10 月 15 日

線形代数２演習問題

4-1. (対称行列の直交行列による対角化)

行列 $A = \begin{pmatrix} -11 & -4 & 2 \\ -4 & -11 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値を求めよ。

(2) A の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^3$ の基底を１組求めよ。

(3) (2) で求めた $\mathbb{R}^3$ の基底に対して、グラム-シュミットの直交化法を適用して、$\mathbb{R}^3$ の正規直交基底を 1 組求めよ。

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P を求めよ。また、そのときの $P^{-1}AP$ を求めよ。

線形代数２通信 [No.4] 2026 年 10 月 15 日発行

■ 第３回学習内容チェックシートについて

- Q3 の 1 番目の解答では、「$A\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ が存在するときをいう」というものが一定数ありました。この書き方では、「何」を A の固有値と呼ぶのかがわかりません。「$A\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}$ ..... が存在するときの $\lambda \in \mathbb{R}$ のこと」のように答えましょう。
- Q4 の表の 2 番目では「連立一次方程式 $(\lambda E_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解く」という解答がとても多かったです。固有ベクトルには零ベクトルは含まれないので、固有ベクトルを求める場合には、まず、(ガウスの消去法を用いて) 連立一次方程式を解き、そのあとに、零ベクトルを除くという操作が必要です。固有ベクトルを求める際は、この順番を守ってください。

■ 演習 3-1 について

P, Q が直交行列のとき、$R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} P & Q \\ P & -Q \end{pmatrix}$ も直交行列であることを示す問題です。正答率は 3 割程度でした。

$R^{\mathrm{T}}R$ が単位行列になることを示します。この方針はとっているものの、R^{T} を $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} P & P \\ Q & -Q \end{pmatrix}$ として計算した人が思いの外多かったです。P, Q は数ではないので、転置をとらなければなりません。正しくは $R^{\mathrm{T}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} P^{\mathrm{T}} & P^{\mathrm{T}} \\ Q^{\mathrm{T}} & -Q^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$ です。これを用いて $R^{\mathrm{T}}R$ を計算すると $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2P^{\mathrm{T}}P & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & 2Q^{\mathrm{T}}Q \end{pmatrix}$ となり、さらに、P, Q が直交行列であることを使って $R^{\mathrm{T}}R = E_{2n}$ が得られます。

■ 演習 3-2 について

(1) $\Delta_A(x) = |xE_3 - A|$ を計算し、方程式 $\Delta_A(x) = 0$ を解けば、その実数解として A の固有値が求まります。まず、$|xE_3 - A|$ の第 2 行、第 3 行を第 1 行に足し上げて、第 1 行から $x - 11$ をくくり出します。すると、$(x-11)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -9 & x+9 & -11 \\ -9 & -11 & x+9 \end{vmatrix}$ となります。次に、第 1 列の (-1) 倍を第 2 列と第 3 列にそれぞれ加えて、第 1 行に関して余因子展開を行います。すると、$(x-11)\begin{vmatrix} x+18 & -2 \\ -2 & x+18 \end{vmatrix}$ となります。この 2 次行列式は $(x+18)^2 - (-2)^2 = (x+20)(x+16)$ のように因数分解できるので、A の固有値は $11, -16, -20$ であることがわかります。

(2) (1) の計算結果から、A の最大固有値は 11 なので、固有値 11 に属する固有ベクトルを求めます。まず、連立一次方程式 $(11E_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解き、その実数解の中から $\mathbf{0}$ を除く、という方針で求めてください。$11E_3 - A$ に (ガウスの消去法の前進部分に相当する) 行基本変形を施して階段型にし、得られた行列を連立一次方程式に戻し、後退代入を行い、$(11E_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の実数解を求めます。その中から $\mathbf{0}$ を除いて、固有値 11 に属する固有ベクトル $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R},\ t \neq 0)$ を得ることができます。

■ 次回予告

次回は、数ベクトル空間の部分空間を学びます。数ベクトル空間の部分空間は、抽象ベクトル空間へ移行する際の中継的役割を担う重要な概念です。特に、部分空間とその基底、ベクトルによって張られる部分空間、連立一次方程式の解空間の基底の求め方を学びます。

線形代数２・第 4 回 (2026 年 10 月 15 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません)。